Martin Sauerhoff
Stefan Droste

Dortmund, 1. Februar
Abgabe: 6. Februar um 12:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie & Effiziente Algorithmen (KT & EA)
Wintersemester 2005/06

Blatt 14

Aufgabe 14.1 (5 Punkte)
Zeige, dass die Parity-Funktion $\mathrm{PAR}_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$ für $n \geq 2$ nicht in $TC^{0,1}$ ist.

Aufgabe 14.2 (5 Punkte)
Eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ heißt symmetrisch, wenn der Funktionswert $f(x)$ für alle x mit derselben Zahl von Einsen gleich ist. Zeige, dass alle symmetrischen Funktionen in $TC^{0,2}$ sind.

Aufgabe 14.3 (5 Punkte)
Die Funktion COMPARE : $\{0,1\}^{2n} \to \{0,1\}$ gibt für zwei Bitstrings $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0)$ und $y = (y_{n-1}, \ldots, y_0)$ genau dann Eins aus, wenn die von x binär dargestellte Zahl $\sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i$ größer als die von y binär dargestellte Zahl $\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot 2^i$ ist. Zeige, dass COMPARE $\in \mathrm{AC}^{0,3}$ ist.

Aufgabe 14.4 (5 Punkte)

(a) Die Funktion $\mathrm{INDEX}_n : \{0,1\}^{n+k} \to \{0,1\}$ mit $n = 2^k$ ist folgendermaßen definiert: für eine Eingabe $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{k-1}$ sei $s \in \{0, \ldots, n-1\}$ der Wert der y-Variablen als Binärzahl interpretiert. Dann ist die Ausgabe x_s.

Zeige, dass die 1-Runden-Kommunikationskomplexität $D^1(f)$ bez. einer Eingabepartition, in der Alice l der x-Bits und Bob alle Adressbits hat, mindestens gleich l ist.

(b) Zeige, dass jedes OBDD für die indirekte Adressierungsfunktion ISA_n (siehe Folie 647) Größe $2^{\Omega(n/\log(n))}$ hat.

Hinweis zu (b): Bei ISA_n lassen sich die Bits $x_0, \ldots, x_{n-1}$ in $m = \lfloor n/\log(n) \rfloor$ Gruppen zu je $\log(n)$ Bits einteilen. Zeige, dass sich jede beliebige Variablenreihenfolge π so aufteilen lässt, dass im ersten Teil $m-1$ x-Bits und im zweiten Teil alle x-Bits einer Gruppe stehen. Finde dann eine Belegung der restlichen Variablen, sodass sich Teil (a) anwenden lässt.