



# Zur impliziten Darstellung von Graphen durch OBDDs

Robin Nunkesser

2. Februar 2005



## 1. Überblick

# Überblick

1. Überblick

2. Motivation

3. Grundlagen

4. Ergebnisse

5. Eigene Ergebnisse

6. Ausblick



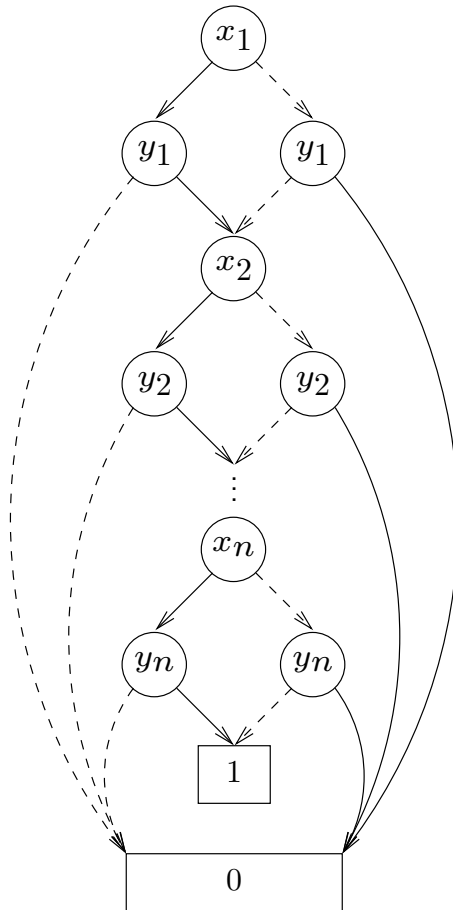
# Motivation

	Adjazenzmatrix	Adjazenzliste	Inzidenzmatrix	OBDDs
Platzbedarf	$\Theta(N^2)$	$\mathcal{O}(N + M)$	$\Theta(NM)$	?
Adjazenzabfrage	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(N)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log N)$

- Implizite Darstellung von Graphen ermöglicht Speicherung sehr großer Graphen.
- Implizite Algorithmen können Strukturinformationen direkt nutzen.



# Grundlagen

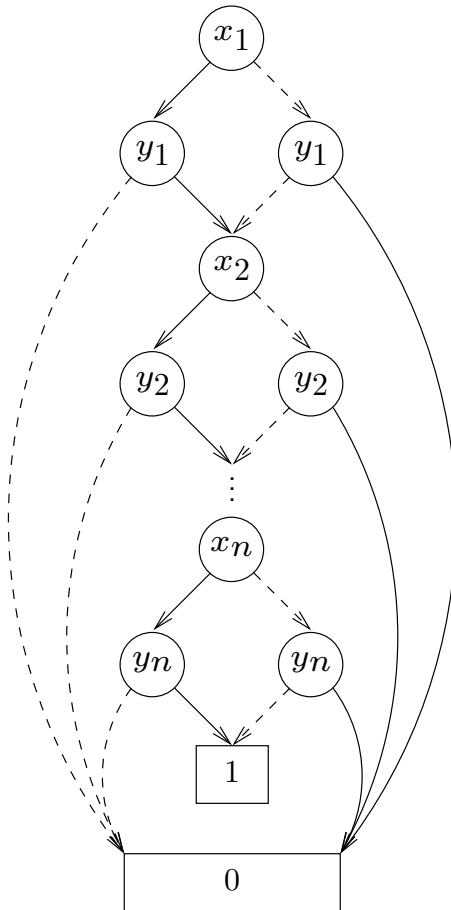


- OBDDs repräsentieren boolesche Funktionen durch einen Graphen.
- OBDDs sind gerichtete kreisfreier Graphen mit Quelle und Senken, innere Knoten haben zwei ausgehende Kanten.
- OBDD in Abbildung repräsentiert Gleichheitstest: Für  $x, y \in \{0, 1\}^n$  ist die Funktion  $\text{EQUAL}(x, y) \in B_{2n}$  definiert als:

$$\text{EQUAL}(x, y) = 1 \iff x = y.$$



# Grundlagen



**Definition 1** Graph  $G$  wird implizit durch OBDD dargestellt, wenn das OBDD die charakteristische Funktion der Kanten von  $G$

$$\chi_{E(G)} : U \times U \rightarrow \{0, 1\} \text{ für } U \supseteq V(G)$$

repräsentiert:

$$\chi_{E(G)}(v, w) = 1 \iff \{v, w\} \in E(G).$$



Die Knoten werden dazu binär kodiert.



# Ergebnisse

- Daniel Sawitzki ([Saw02]): Obere Schranke für die Größe einer impliziten Darstellung für quadratische Gitter mit  $\chi_V \equiv 1$  von

$$21 \log N - 12.$$

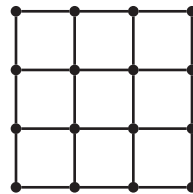


Abbildung 1: Beispiel eines quadratischen Gitters

- Philipp Wölfel ([Wöl03]): Obere Schranke für die Größe einer impliziten Darstellung für Cographen von

$$4N \log N + 8N.$$



## Eigene Ergebnisse

Graphklasse	Obere Schranke OBDD-Größe	Untere Schranke w.c. ( $\kappa$ konst.)
Beliebigdimensionale Gitter mit $\chi_V \equiv 1$	$14 \log N$	$\frac{\log N}{c \log \log N}$ für alle $c > 2$
Beliebigdimensionale Tori mit $\chi_V \equiv 1$	$22 \log N$	$\frac{\log N}{c \log \log N}$ für alle $c > 2$
Beliebigdimensionale Gitter	$21,04 \log N$	$\frac{\log N}{c \log \log N}$ für alle $c > 2$
Beliebigdimensionale Tori	$28,25 \log N$	$\frac{\log N}{c \log \log N}$ für alle $c > 2$
Cograph ( $P_4$ -frei)	$(3N - 1) \log N + 2N + 3,5$	$\frac{N}{c \log N}$ für alle $c > \frac{1}{\log \kappa}$
$P_4$ -reduzierbar	$(3,25N - 2) \log N + 2N + 2,5$	$\frac{N}{c \log N}$ für alle $c > \frac{1}{\log \kappa}$
$P_4$ -spärlich	$(3,5N - 1,5) \log N + 2N + 3,5$	$\frac{N}{c \log N}$ für alle $c > \frac{1}{\log \kappa}$
$P_4$ -erweiterbar	$(3,25N - 2) \log N + 2N + 2,5$	$\frac{N}{c \log N}$ für alle $c > \frac{1}{\log \kappa}$
Einheitsintervallgraphen	$10N + 1$	$\frac{N}{c \log N}$ für alle $c > \frac{1}{2}$
Intervallgraphen	$\left(\frac{41}{14}N - \frac{29}{3}\right) \sqrt{N} + 3N + \frac{34}{7}$	$\frac{N}{c}$ für alle $c > 1$
Bipartite Graphen	$(4 + o(1)) \frac{N^2}{\log N}$	$\frac{N^2}{c \log N}$ für alle $c > 8$
Ungerichtete Graphen	$(4 + o(1)) \frac{N^2}{\log N}$	$\frac{N^2}{c \log N}$ für alle $c > 4$



## Eigene Ergebnisse

- Untere Schranken im worst-case mit Einschränkungen von
  - $\frac{N}{2}$  für Cographen,  $P_4$ -reduzierte,  $P_4$ -spärliche und  $P_4$ -erweiterbare Graphen,
  - $(2 - o(1)) \frac{N^2}{\log N}$  für bipartite Graphen.
- Allgemeine Methoden zum Beweis von oberen und unteren Schranken.



# Berechnung unterer Schranken mit Abzählargumenten

**Lemma 2 ([Weg00])** *Es können höchstens*

$$sn^s (s + 1)^{2s} (s!)^{-1}$$

*verschiedene Funktionen  $f \in B_n$  durch BDDs der Größe  $s$  repräsentiert werden.*

**Notation 3**  $N_{\mathcal{G}}(N)$  bezeichnet die Anzahl verschiedener nicht-isomorpher Graphen mit  $N$  Knoten einer Graphklasse  $\mathcal{G}$ . ◇

**Korollar 4** *Ist für eine Graphklasse  $\mathcal{G}$ , ein  $N \in \mathbb{N}$  und eine Schranke  $s_N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{s_N (2 \log N)^{s_N} (s_N + 1)^{2s_N}}{N_{\mathcal{G}}(N) s_N!} \right) = 0,$$

*dann gibt es Graphen in  $\mathcal{G}$ , deren implizite Darstellung mit einem OBDD mindestens Größe  $s_N$  benötigt.*



# Berechnung unterer Schranken mit Abzählargumenten

**Definition 5** Ein Graph ist *indiziert*, wenn die  $N$  Knoten voneinander durch Namen unterschieden werden. ◇

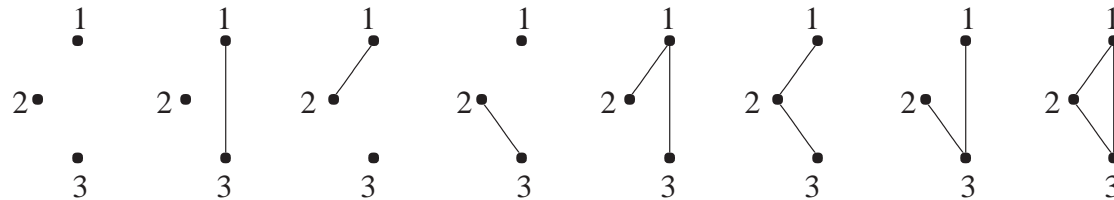


Abbildung 2: Die acht verschiedenen indizierten Graphen mit drei Knoten.

**Satz 6 ([Pól37])** *Es gibt*

$$2^{\binom{N}{2}}$$

*verschiedene indizierte Graphen mit  $N$  Knoten.*

**Beweis** Es gibt  $\binom{N}{2}$  mögliche verschiedene indizierte Knotenpaare, zwischen denen entweder eine Kante oder keine Kante ist. □



# Berechnung unterer Schranken mit Abzählargumenten

**Satz 7 ([HPR67])** Sei  $\mathcal{A}$  die Klasse der ungerichteten Graphen, dann ist

$$N_{\mathcal{A}}(N) \geq \frac{2^{\binom{N}{2}}}{N!} = \frac{2^{\frac{N^2-N}{2}}}{N!}.$$

**Satz 8** Es gibt ungerichtete Graphen, deren implizite Darstellung mit einem OBDD mindestens Größe  $\frac{N^2}{c \log N}$  für alle  $c > 4$  benötigt.

**Beweis** Es ist für  $c > 4$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( \frac{N^2}{c \log N} \right) (2 \log N)^{\left( \frac{N^2}{c \log N} \right)} \left( \left( \frac{N^2}{c \log N} \right) + 1 \right)^{\left( \frac{2N^2}{c \log N} \right)} N!}{2^{\frac{N^2-N}{2}} \left( \frac{N^2}{c \log N} ! \right)} \right) \leq \dots = 0.$$

□



## Gitter und Tori

**Definition 9** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

1.  $G$  heißt  $r$ -dimensionales Gitter ( $Gr^r$ ), falls  $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  und

$$E(Gr^r) = \left\{ \{(v_1, v_2, \dots, v_r), (w_1, w_2, \dots, w_r)\} \in \mathcal{P}_2(V) \mid \sum_{i=1}^r |v_i - w_i| = 1 \right\}.$$

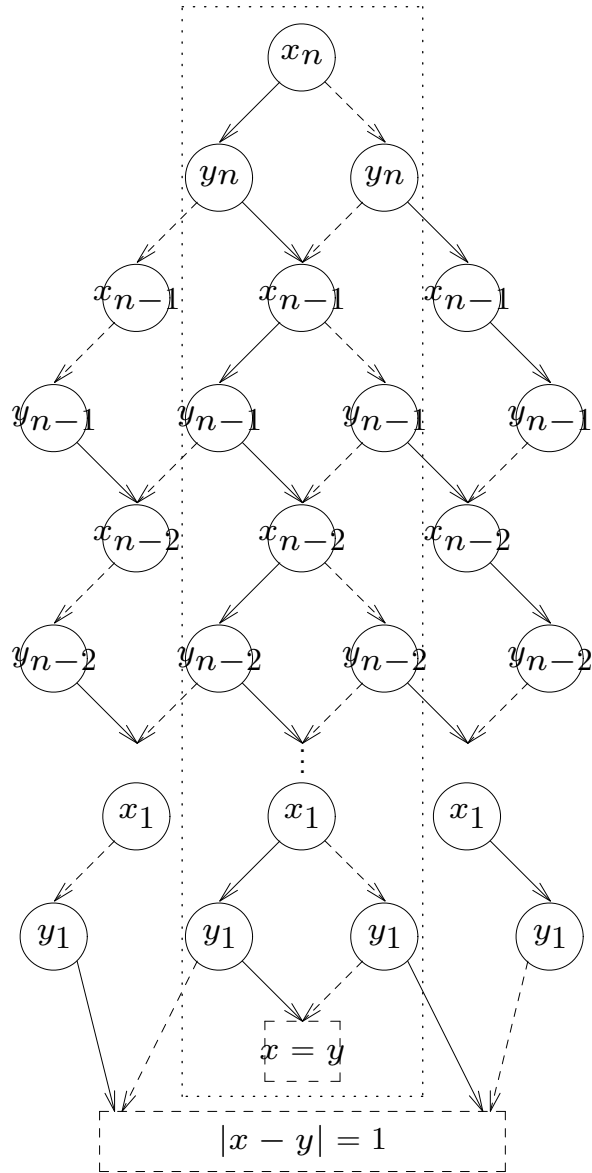
2.  $G$  heißt  $r$ -dimensionaler Torus ( $To^r$ ), falls  $G$  ein Gitter mit zusätzlichen Kanten ist:

$$\begin{aligned} E(To^r) &= E(Gr^r) \cup \\ &\bigcup_{i=1}^r \{ \{(v_1, \dots, v_r), (w_1, \dots, w_r)\} \in \mathcal{P}_2(V) \mid |v_i - w_i| = |V_i| - 1 \\ &\wedge \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |v_j - w_j| = 0 \}. \end{aligned}$$

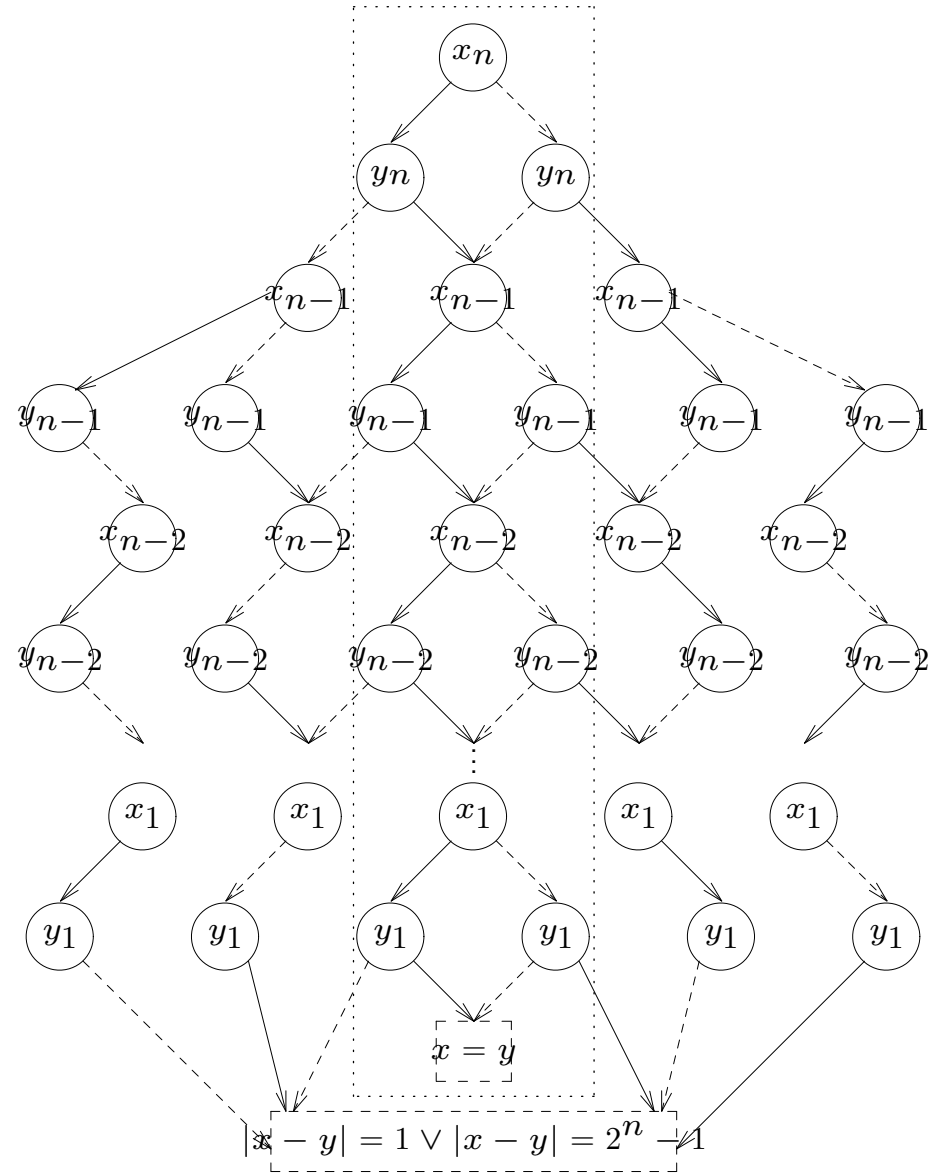




# Gitter und Tori



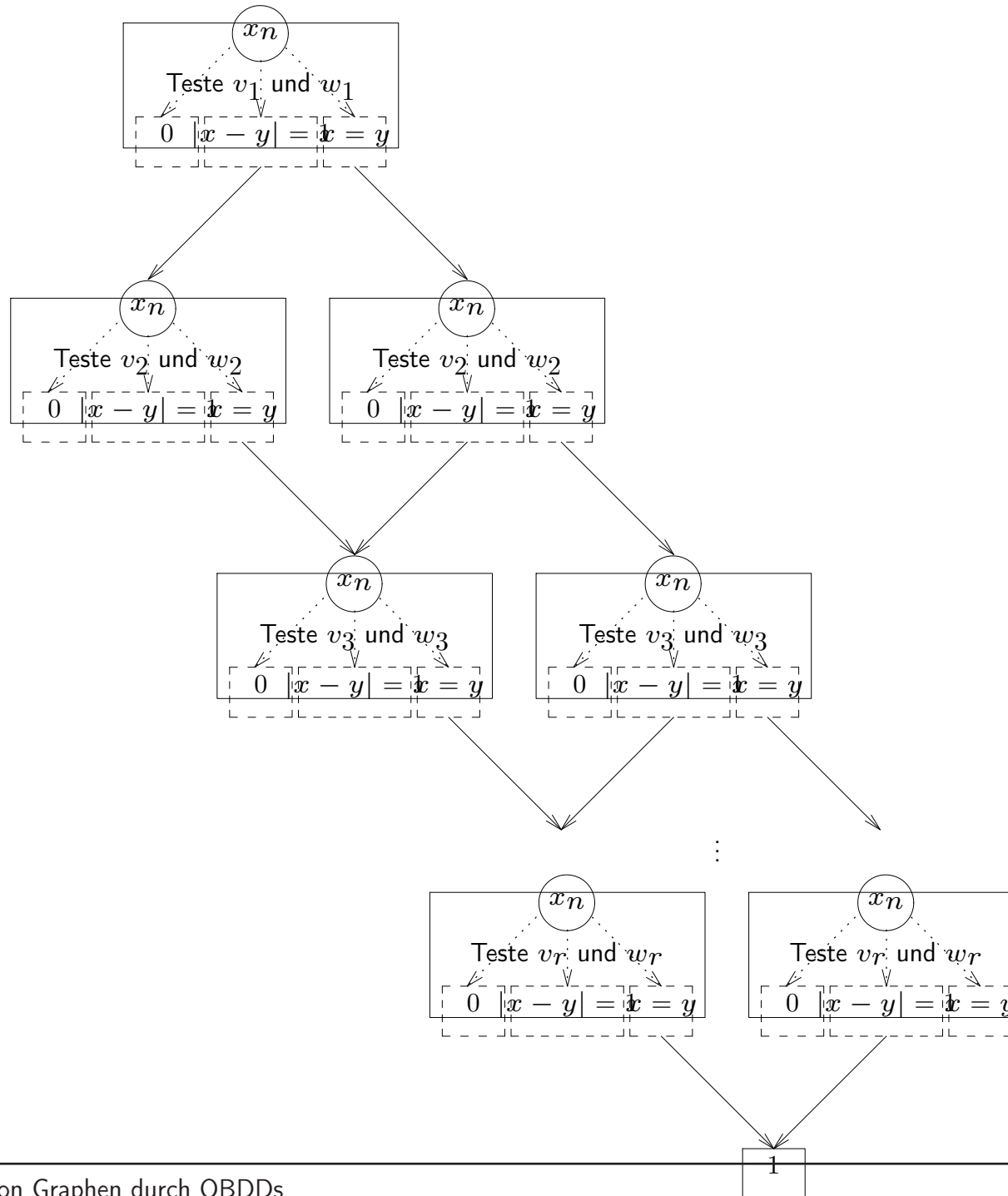
Größe:  $7n - 4$



Größe:  $11n - 10$



5. Eigene Ergebnisse





## Gitter und Tori

Da wir für den ersten Test nur einen OBDD-Abschnitt benötigen, testen wir dort die Dimension mit der höchsten Knotenzahl. Der OBDD-Abschnitt hat also Größe  $7 \max_{1 \leq i \leq r} \{\log |V_i|\} - 4$ . Für alle weiteren Tests einer Dimension  $i$  mit  $1 \leq i \leq r$  benötigen wir zwei OBDD-Abschnitte der Größe  $7 \log |V_i| - 4$ . Dazu kommen noch zwei Senken:

$$\sum_{i=1}^r 2(7 \log |V_i| - 4) - \left(7 \max_{1 \leq i \leq r} \{\log |V_i|\} - 4\right) + 2 = 14 \sum_{i=1}^r \log |V_i| - 7 \max_{1 \leq i \leq r} \log |V_i| - 8r + 6$$

Im Verhältnis zur Knotenzahl  $N = \prod_{i=1}^r |V_i|$  ist dies:

$$\begin{aligned} 14 \sum_{i=1}^r \log |V_i| - 7 \max_{1 \leq i \leq r} \log |V_i| - 8r + 6 &= 14 \log N - 7 \max_{1 \leq i \leq r} \log |V_i| - 8r + 6 \\ &< 14 \log N \end{aligned}$$



## Graphen mit wenigen $P_4$ s - Cographen

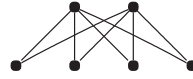


Abbildung 3: Beispiel eines Cographen.

**Definition 10** Ein Graph ist genau dann ein *Cograph*, wenn er keinen  $P_4$  als induzierten Teilgraphen enthält.  $\diamond$

- Aus Einzelknotengraphen durch Anwendung zweier Operationen konstruierbar ([Ler72]):

**Vereinigung:**

$$G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$$

**\*-Produkt:**

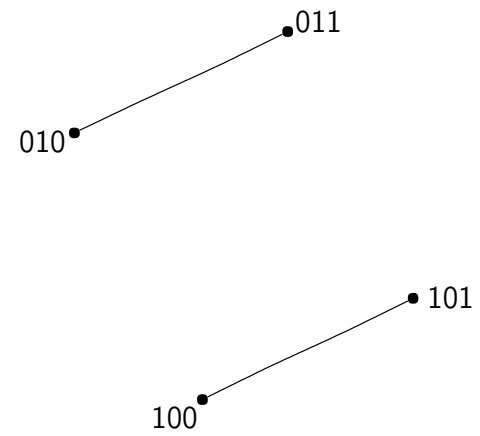
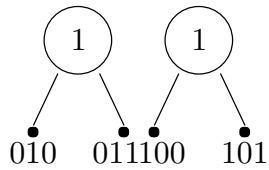
$$G_1 * G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{v, w\} \mid v \in V(G_1), w \in V(G_2)\})$$

- Eindeutig durch einen Baum darstellbar ([Ler71])



## 5. Eigene Ergebnisse

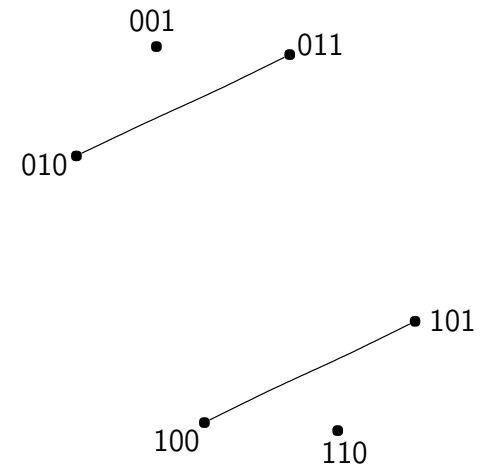
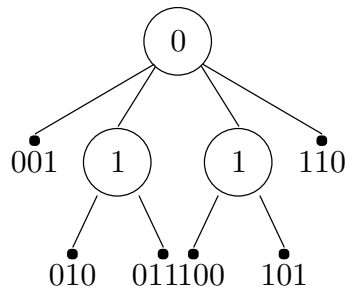
## Cobäume





## 5. Eigene Ergebnisse

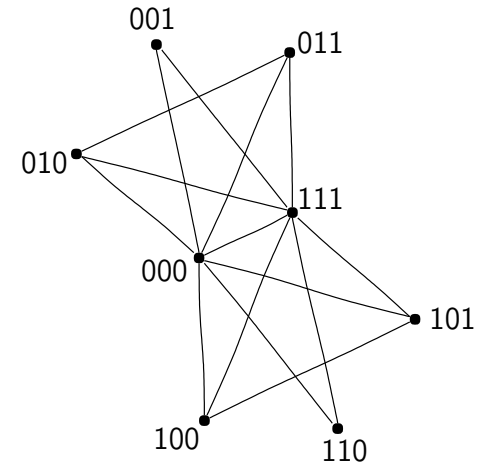
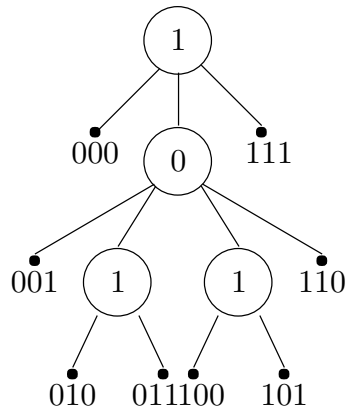
## Cobäume





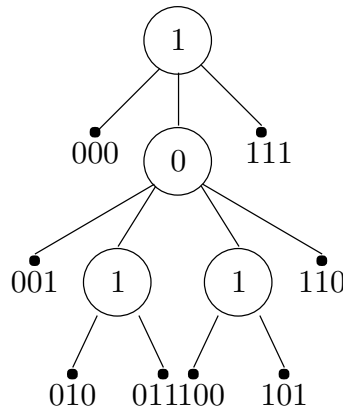
## 5. Eigene Ergebnisse

## Cobäume





# Algorithmus zur Berechnung von $\chi_{E(G)}(x, y)$



- Tiefster gemeinsamer Vorgängerknoten zweier Blätter gibt an, ob die zugehörigen Knoten des Cographen adjazent sind
- Kodierung der Knoten gemäß Preorder-Traversierung des Cobaums

1. Volles Lesen von  $x$

$$\text{Kosten: } 2N - \frac{N}{2^{\lceil \log N \rceil}} + \lceil \log N \rceil + 1$$

(Abschätzung für  $\sum_{i=0}^{\lceil \log N \rceil} \lceil \frac{N}{2^i} \rceil$ )

2. Bei jedem Leseschritt von  $y$  muss tiefster möglicher gemeinsamer Vorgängerknoten und  $x < y$ ,  $x > y$  oder  $x = y$  gespeichert werden

$$\text{Kosten: } (\lceil \log N \rceil - 1)(N + 2(N - 1))$$

Gesamt:  $3N \log N + 2N - \log N + 3,5$



# Graphen mit wenigen $P_4$ s ([JO89, Hoá85, JO91])



Abbildung 4: Ein  $P_4$ -reduzierbarer Graph.

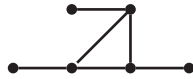


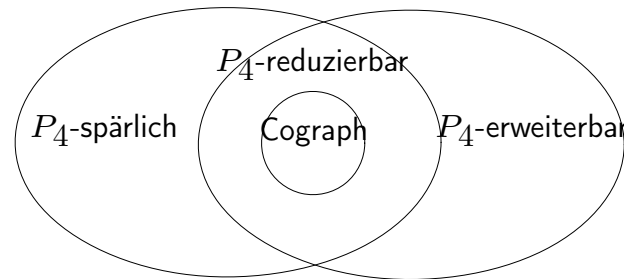
Abbildung 5: Ein  $P_4$ -spärlicher Graph.



Abbildung 6: Ein  $P_4$ -erweiterbarer Graph.

## Definition 11

1. Ein  $G$  ist  $P_4$ -reduzierbar, wenn jeder Knoten zu höchstens einem  $P_4$  des  $G$  gehört.
2. Ein Graph ist  $P_4$ -spärlich, wenn jede beliebige Menge von fünf Knoten des Graphen höchstens einen  $P_4$  induziert.
3. Ein Graph ist  $P_4$ -erweiterbar, wenn es zu jedem induzierten  $P_4$  höchstens einen weiteren Knoten gibt, der mit drei Knoten des  $P_4$ s ebenfalls einen  $P_4$  induziert.  $\diamond$





## $P_4$ -reduzierbare Graphen

Werden durch eine zusätzliche Operation erzeugt:

**Definition 12 ([JO89])** Seien  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  Graphen mit disjunkten Knotenmengen und den Eigenschaften:

1.  $V_1 = \{a, d\}, E_1 = \emptyset$ .
2. Es gibt Knoten  $b, c \in V_2$  mit  $\{\{b, v\} \mid v \in V_2, v \neq b\} \cup \{\{c, v\} \mid v \in V_2, v \neq c\} \subseteq E_2$ .

Dann ist

$$G_1 (2) G_2 := (V_1 \cup V_2, \{\{a, b\}, \{c, d\} \cup E_2\}).$$



Diese Operation ist unhandlich für den Algorithmus.



## $P_4$ -reduzierbare Graphen

### Definition 13

1. Seien  $G_1 = (\{a\}, \emptyset)$ ,  $G_2 = (\{b\}, \emptyset)$ ,  $G_3 = (\{c\}, \emptyset)$  und  $G_4 = (\{d\}, \emptyset)$  vier Graphen mit disjunkten Knotenmengen. Dann ist die Operation  $P_4$ -Erzeugung  $\overset{4}{\dashv}$  definiert als:

$$\overset{4}{\dashv} (G_1, G_2, G_3, G_4) = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\})$$

2. Seien  $G_1 = (V_1 := \{a, b, c, d\}, E_1 := \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\})$  ein  $P_4$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  ein beliebiger Graph ( $V_2 = E_2 = \emptyset$  möglich) mit disjunkten Knotenmengen. Dann ist die Operation *Flügel-Addition*  $\Upsilon$  definiert als:

$$G_1 \Upsilon G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{b, v\} \mid v \in V_2\} \cup \{\{c, w\} \mid v \in V_2\})$$



Neben tiefstem möglichem gemeinsamen Vorgängerknoten und  $x < y$ ,  $x > y$  oder  $x = y$  muss noch zwischenzeitlich „ $c$ -ter Knoten  $P_4$ “, „innerer Knoten  $P_4$ “, „äußerer Knoten  $P_4$ “ gespeichert werden.  $\rightarrow$  Geschieht durch Wahl eines isomorphen Operationsbaums.



# Intervallgraphen

## Definition 14 ([Haj57, Rob69])

1. Sei  $M$  eine Menge von Objekten, für die eine Schnittoperation  $\cap$  definiert ist, dann ist der *Schnittgraph*  $G_M = (V, E)$  definiert durch:

$$V = M$$

$$E = \{\{v, w\} \mid v, w \in M, v \cap w \neq \emptyset\}.$$

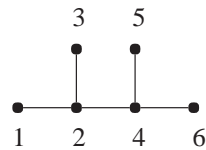


Abbildung 7: Beispiel eines Intervallgraphen.

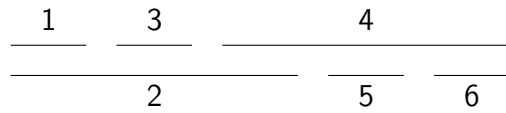


Abbildung 8: Beispiel für die Intervalle des Graphen aus Abbildung 7.



Abbildung 9: Klaue.

2. Ein *Intervallgraph* ist ein Schnittgraph auf einer endlichen Menge von Intervallen in den reellen Zahlen.
3. Ein *Einheitsintervallgraph* ist ein Intervallgraph, dessen Intervalle alle geschlossen sind und Länge 1 haben.  $\diamond$



# Einheitsintervallgraphen

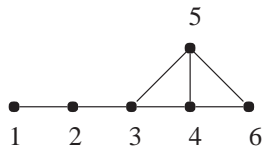


Abbildung 10: Beispiel eines Einheitsintervallgraphen.

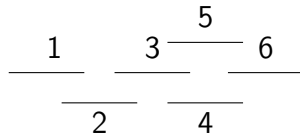


Abbildung 11: Beispiel für die Intervalle des Graphen aus Abbildung 10.

**Satz 15** Sei  $M$  eine endliche Menge von geschlossenen Intervallen der Länge 1 und  $G_M$  der entsprechende Einheitsintervallgraph. Der Graph  $G_{M_1} = (V_{M_1}, E_{M_1})$  mit

$$V_{M_1} = \{a \mid [a; b] \in V(G_M)\}$$

$$E_{M_1} = \{\{v, w\} \mid v, w \in V_{M_1}, |v - w| \leq 1\}$$

ist isomorph zu  $G_M$ .

Wähle mit  $n = \lceil \log |V_{M_1}| \rceil$  die binären Kodierungen  $x = x_n x_{n-1} \dots x_1$  und  $y = y_n y_{n-1} \dots y_1$  zweier Knoten  $v, w \in V_{M_1}$  so, dass gilt:

$$\text{bin}_n(0) \leq x, y \leq \text{bin}_n(|V_{M_1}| - 1)$$

$$v \leq w \iff x \leq y.$$



## Algorithmus zur Berechnung von $\chi_{E(G)}(x, y)$

1. Abwechselndes Lesen der Bits von  $x$  und  $y$
2. Bestimmung der Menge  $V_x$  bzw.  $V_y$  aller Knoten, deren Kodierung mit dem gelesenen Teil von  $x$  bzw.  $y$  beginnt.
  - (a) Es gibt keine Kante zwischen einem Knoten in  $V_x$  und einem Knoten in  $V_y$ . Dann gebe 0 aus.
  - (b) Jeder Knoten in  $V_x$  hat eine Kante zu jedem Knoten in  $V_y$ . Dann gebe 1 aus.
  - (c) Es existiert sowohl ein Knotenpaar aus  $V_x \times V_y$ , zwischen dem eine Kante ist, als auch eins, zwischen dem keine Kante ist. Dann: Speichere bisher gelesene Bits von  $x$  und  $y$ , gehe zu 1.

Platzbedarf:  $10N + 1$



## Beweis der Platzbedarfsschranke

Sei  $N_k := \left\lceil \frac{N}{2^{\lceil \log N \rceil - k}} \right\rceil$ , dann ergibt die Abstandsbestimmung von  $x_1 x_2 \dots x_k$  und  $y_1 y_2 \dots y_l$  höchstens

$$\begin{cases} 1 & , \text{ falls } N_k = 1 \\ 2 & , \text{ falls } N_k = 2, l = k - 1 \\ 4 & , \text{ falls } N_k = 2, l = k \\ 2N_k + 2N_{k+1} - 4 & , \text{ falls } N_k > 2, l = k - 1 \\ 4N_k - 4 & , \text{ falls } N_k > 2, l = k - 1 \end{cases}$$

Mal einen unsicheren Wert. Insgesamt kann der Algorithmus so höchstens

$$\sum_{i=2}^{\lceil \log N \rceil} \left( 2 \left\lceil \frac{N}{2^{\lceil \log N \rceil - i}} \right\rceil + 2 \left\lceil \frac{N}{2^{\lceil \log N \rceil - i + 1}} \right\rceil - 4 \right) + \sum_{i=2}^{\lceil \log N \rceil - 1} \left( 4 \left\lceil \frac{N}{2^{\lceil \log N \rceil - i}} \right\rceil - 4 \right) + 9 \leq 10N + 1$$

Knoten erzeugen.



# Intervallgraphen

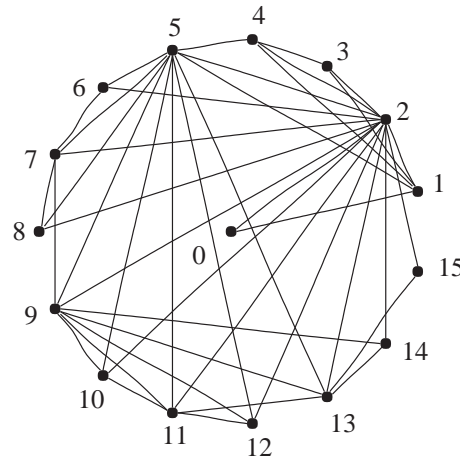


Abbildung 12: Beispiel eines Intervallgraphen.

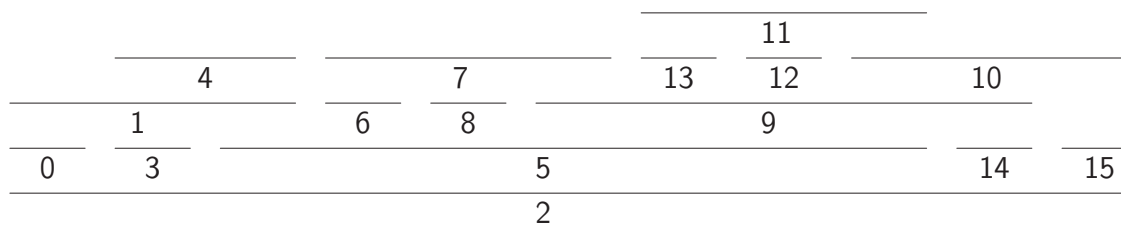


Abbildung 13: Beispiel einer Intervallrepräsentation des Graphen aus Abbildung 12.



# Kodierung der Knoten

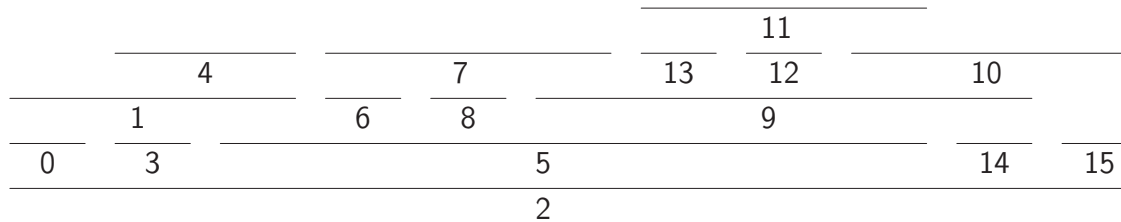


Abbildung 14: Beispiel einer Intervallrepräsentation.

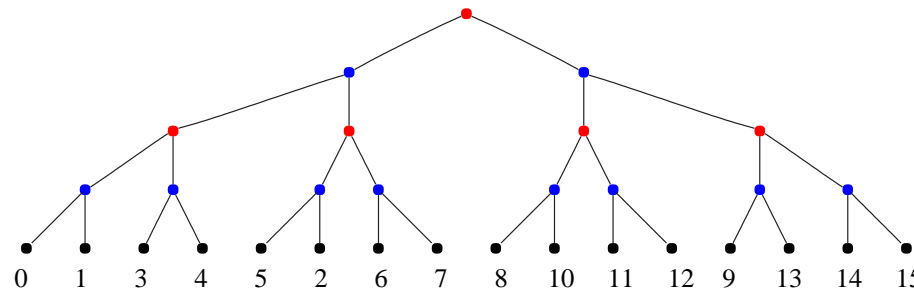


Abbildung 15: Identifikationsbaum zur Kodierung der Intervallrepräsentation aus Abbildung 14.

$v \in V$	Kodierung	$v \in V$	Kodierung	$v \in V$	Kodierung	$v \in V$	Kodierung
0	0000	4	0011	8	1000	12	1011
1	0001	5	0100	9	1100	13	1101
2	0101	6	0110	10	1001	14	1110
3	0010	7	0111	11	1010	15	1111



## Algorithmus zur Berechnung von $\chi_{E(G)}(x, y)$

1. Abwechselndes Lesen der Bits von  $x$  und  $y$
2. Bestimmung der Menge  $V_x$  bzw.  $V_y$  aller Knoten, deren Kodierung mit dem gelesenen Teil von  $x$  bzw.  $y$  beginnt.
  - (a) Es gibt keine Kante zwischen einem Knoten in  $V_x$  und einem Knoten in  $V_y$ . Dann gebe 0 aus.
  - (b) Jeder Knoten in  $V_x$  hat eine Kante zu jedem Knoten in  $V_y$ . Dann gebe 1 aus.
  - (c) Es existiert sowohl ein Knotenpaar aus  $V_x \times V_y$ , zwischen dem eine Kante ist, als auch eins, zwischen dem keine Kante ist. Dann: Speichere bisher gelesene Bits von  $x$  und  $y$ , gehe zu 1.

Platzbedarf:  $\frac{41}{14}N\sqrt{N} - \frac{29}{3}\sqrt{N} + 3N + \frac{34}{7}$



## Beweis der Platzbedarfsschranke

Wir beweisen  $\frac{46}{7}\sqrt{2}N\sqrt{N} - \frac{9}{2}N + \frac{31}{14}$ , dafür aber mit einem einfacheren Beweis und ohne Einschränkung auf Zweierpotenzen:

- Wir müssen das Auftreten von Fall 2c abschätzen.
- Betrachte lexikographisch geordnete Liste aller Quadrupel  $(y_g, x_u, x_g, y_u)$  für die Fall 2c eintritt (**g**erade, **u**ngerade).
- Nehme o.B.d.A.  $x < y$  und der Einfachheit halber an, dass wir von  $x$  und  $y$  gleich viele Bits gelesen haben und dass Fall 2c für alle Quadrupel mit Beginn  $r_i, s_i$  eintritt, wenn er für ein Quadrupel  $(r_i, s_i, t_i, u_i)$  eintritt.

**Behauptung** Sei  $(r_1, s_1, t_1, u_1), \dots, (r_p, s_p, t_p, u_p)$  die Liste der Quadrupel, dann gilt für zwei benachbarte Quadrupel  $(r_i, s_i, t_i, u_i)$  und  $(r_{i+1}, s_{i+1}, t_{i+1}, u_{i+1})$   $s_i \leq s_{i+1}$ .



## Beweis der Platzbedarfsschranke

**Beweis** Sei  $r_i < r_{i+1}$  (sonst trivial).

- Da  $x < y$  angenommen ist und Fall 2c eintritt, muss das am weitesten rechts liegende Intervall, dessen Kodierung mit  $x$  beginnt das am weitesten links liegende Intervall, dessen Kodierung mit  $y$  beginnt, schneiden.

$$\frac{x \dots}{x \dots} \quad \frac{y \dots}{y \dots}$$

Abbildung 16: Beispiel für die Lage der Intervalle in Fall 2c bei  $x < y$ .

- Für alle Quadrupel mit größerem ersten Wert als  $r_i$  und kleinerem zweiten Wert als  $s_i$  muss Fall 2b eintreten („späterer Start als  $y$ , früheres Ende als  $x$ “).

□



## Beweis der Platzbedarfsschranke

Da in der Liste der Quadrupel  $(r_1, s_1, t_1, u_1), \dots, (r_p, s_p, t_p, u_p)$  entweder  $r_{i+1} > r_i$  oder  $s_{i+1} > s_i$  für  $1 \leq i \leq p-1$  gilt, folgt ( $x = y$  eingeschlossen):

$$p \leq \left(2^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} - 1\right) 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lceil \frac{\ell}{2} \rceil}$$

Für gerade Eingabelänge  $n$  ergibt sich mit dem analogen Fall  $x > y$  und zwei Senken für den letzten Schritt des Algorithmus:

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ gerade}}}^n \left( \frac{7}{2} \cdot 2^{\frac{3k}{2}} - 2 \cdot 2^k \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{n-1} \left( \frac{9}{4} \sqrt{2} 2^{\frac{3k}{2}} - \frac{3}{2} \cdot 2^k \right) - 2 \cdot 2^{\frac{3n}{2}} + 2^n + 2 = \dots =$$

$$\frac{46}{7} \sqrt{2} N \sqrt{N} - \frac{9}{2} N + \frac{31}{14}.$$

Da ungerades  $n$  zu  $\frac{48}{7} N \sqrt{N} - \frac{11}{4} \sqrt{2} N - \frac{1}{2} N + \frac{10}{7} \sqrt{2} + 2$  führt, folgt die Behauptung.



# Bipartite Graphen

**Definition 16** Ein Graph  $G = (V_1 \uplus V_2 =: V, E)$  heißt *bipartit*, wenn sich die Knotenmenge  $V$  disjunkt in zwei Teile  $V_1, V_2$  teilen lässt, so dass jede Kante zwischen einem Knoten in  $V_1$  und einem Knoten  $V_2$  verläuft.  $\diamond$



Abbildung 17: Beispiel eines bipartiten Graphen.



## Bipartiter Graph zu einer Funktion

**Definition 17** Sei  $f \in B_n$  eine boolesche Funktion. Der bipartite Graph  $G_f = (V_1 \cup V_2, E)$  ist definiert durch:

$$V_1 = \left\{ v \in \mathbb{N}_0 \mid v < 2^{\frac{n}{2}} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ v \in \mathbb{N}_0 \mid 2^{\frac{n}{2}} \leq v < 2^{\frac{n}{2}+1} \right\}$$

$$E = \left\{ \{v, w\} \mid v \in V_1, w \in V_2, f \left( \text{bin}_{\frac{n}{2}}(v) \text{bin}_{\frac{n}{2}}(w - 2^{\frac{n}{2}}) \right) = 1 \right\}. \quad \diamond$$

Wir wählen die Knotenkodierung so, dass  $\psi(v) = \text{bin}_{n+1}(v)$ .

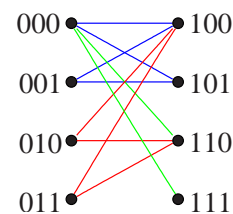


Abbildung 18: Beispiel des bipartiten Graphen zur Funktion  $f = \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_4}$ .



## Untere Schranken für feste Knotenkodierung

**Satz 18** Für jede Funktion  $f \in B_n$  gibt es einen bipartiten Graphen  $G_f$  mit festgelegter Knotenkodierung, der nicht durch ein kleineres OBDD dargestellt werden kann als  $f$ .

**Beweis** Nehmen wir an, es gäbe ein OBDD  $O$  für  $\chi_{E(G_f)}$  mit geringerer Größe. Sei  $\{x_1, \dots, x_{\frac{n}{2}+1}, y_1, \dots, y_{\frac{n}{2}+1}\}$  die Variablenmenge von  $\chi_{E(G_f)}$ .

Aus Definition 17 folgt direkt

$$f(x_2, \dots, x_{\frac{n}{2}+1}, y_2, \dots, y_{\frac{n}{2}+1}) = \chi_{E(G_f)}(0, x_2, \dots, x_{\frac{n}{2}+1}, 1, y_2, \dots, y_{\frac{n}{2}+1}).$$

Wir können ein OBDD von  $f$  aus  $O$  konstruieren, indem wir alle Kanten, die zu Knoten, die mit  $x_1$  oder  $y_1$  beschriftet sind, in den 0-Nachfolger bzw. 1-Nachfolger dieser Knoten umleiten. Das entstehende OBDD hat höchstens die gleiche Größe wie  $O$ . Widerspruch!  $\square$



## Untere Schranken durch ein Abzählargument

Wir betrachten hierzu zunächst indizierte 2-gefärbte Graphen, für die verschiedene Färbungen eines indizierten 2-färbbaren (bipartiten) Graphen zu nicht-isomorphen Graphen führen.

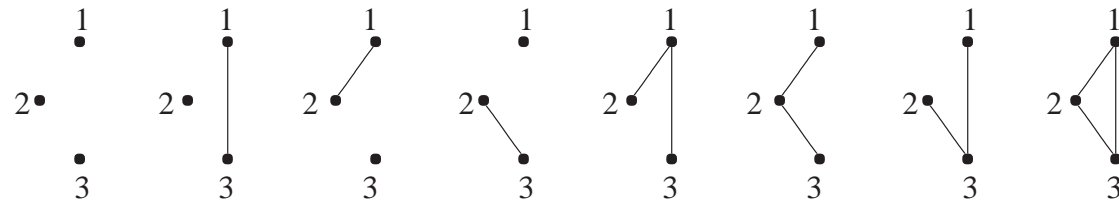


Abbildung 19: Die acht verschiedenen indizierten Graphen mit drei Knoten.

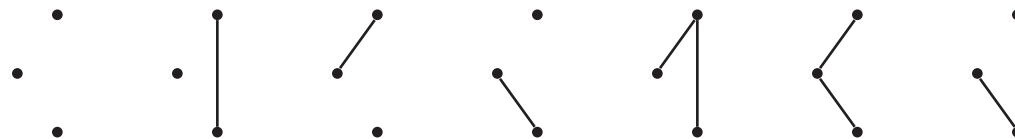


Abbildung 20: Die sieben verschiedenen indizierten bipartiten Graphen mit drei Knoten.

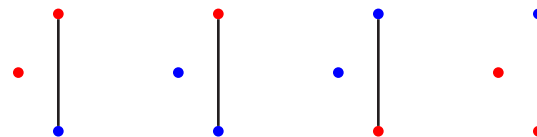


Abbildung 21: Die vier verschiedenen 2-Färbungen des zweiten Graphen aus Abbildung 20.



## Untere Schranken durch ein Abzählargument

Das asymptotische Verhältnis von indizierten 2-gefärbten zu indizierten 2-färbbaren Graphen haben Prömel und Steger angegeben:

**Satz 19 ([PS95])** Für die Klasse der indizierten 2-gefärbten Graphen  $\mathcal{Z}_i$  und die Klasse der indizierten 2-färbbaren Graphen  $\mathcal{B}_i$  gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{\mathcal{Z}_i}(N)}{N_{\mathcal{B}_i}(N)} = 2.$$

Für indizierte 2-gefärbte Graphen gibt es ein asymptotisches Ergebnis von Wright:

**Satz 20 ([Wri61, RW70])** Sei  $\mathcal{Z}_i$  die Klasse der indizierten 2-gefärbten Graphen. Mit der Konstante  $\kappa = 1 \pm 0.0000013097 \dots$  gilt:

$$N_{\mathcal{Z}_i}(N) \sim \kappa 2^{\frac{N^2}{4}} 2^N \sqrt{\left(\frac{2}{N \ln 2}\right)}.$$



## Untere Schranken durch ein Abzählargument

Prömel hat in [Prö87] bewiesen, dass das Verhältnis zwischen indizierten und nicht-indizierten bipartiten Graphen durch  $N!$  beschränkt ist. Insgesamt gilt also:

**Korollar 21** Sei  $\mathcal{B}$  die Klasse der bipartiten Graphen. Es gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2(N!) N_{\mathcal{B}}(N)}{\kappa 2^{\frac{N^2}{4}} 2^N \sqrt{\left(\frac{2}{N \ln 2}\right)}} \leq 1.$$

**Satz 22** Es gibt bipartite Graphen, deren implizite Darstellung mit einem OBDD mindestens Größe  $\frac{N^2}{c \log N}$  für alle  $c > 8$  benötigt.

**Beweis** Es ist für  $c > 8$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\left(\frac{N^2}{c \log N}\right) (2 \log N)^{\left(\frac{N^2}{c \log N}\right)} \left(\left(\frac{N^2}{c \log N}\right) + 1\right)^{\left(\frac{2N^2}{c \log N}\right)} 2(N!)}{\kappa 2^{\frac{N^2}{4}} 2^N \sqrt{\left(\frac{2}{N \ln 2}\right) \left(\frac{N^2}{c \log N}\right)!}} \right) \leq \dots = 0.$$

□



## Ausblick

1. Betrachtung homogen repräsentierbarer Intervallgraphen.
2. Betrachtung weiterer  $P_4$ -beschränkter Graphen mit eindeutiger Baumdarstellung.
3. Betrachtung reduzierter OBDDs für Intervallgraphen.
4. Untere Schranken für konkrete Graphen.
5. Anwendungen.



# Literatur

- [CLSB81] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. Stewart Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3:163–174, 1981.
- [Haj57] G. Hajós. Über eine Art von Graphen. *Internationale Mathematische Nachrichten*, 11, 1957. Problem 65.
- [Hoá85] C. Hoáng. PhD thesis, McGill University, Montreal, Quebec, 1985.
- [HPR67] F. Harary, E. M. Palmer, and R. C. Read. The number of ways to label a structure. *Psychometrika*, 32(2):155–156, 1967.
- [JO89] B. Jamison and S. Olariu.  $p_4$ -reducible graphs - a class of uniquely tree representable graphs. *Studies in Applied Mathematics*, 81:79–87, 1989.
- [JO91] B. Jamison and S. Olariu. On a unique tree representation for  $p_4$ -extendible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 34:151–164, 1991.



- [Ler71] H. Lerchs. On cliques and kernels. Technical report, Department of Computer Science, University of Toronto, 1971. (partly published in [CLSB81]).
- [Ler72] H. Lerchs. On the clique-kernel structure of graphs. Technical report, Department of Computer Science, University of Toronto, 1972.
- [Pól37] G. Pólya. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Mathematica*, 68:145–254, 1937.
- [Prö87] H. J. Prömel. Counting unlabeled structures. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 44:83–93, 1987.
- [PS95] H. J. Prömel and A. Steger. Random  $l$ -colorable graphs. *Random Structures Algorithms*, 6:21–37, 1995.
- [Rob69] F. S. Roberts. Indifference graphs. In F. Harary, editor, *Proof Techniques in Graph Theory*, pages 139–146. Academic Press, New York, 1969.
- [RW70] R. C. Read and E. M. Wright. Coloured graphs: A correction and extension. *Canadian Journal of Mathematics*, 22:594–596, 1970.



- [Saw02] D. Sawitzki. Implizite Algorithmen für Graphprobleme. Diplomarbeit, 2002.
- [Weg00] I. Wegener. *Branching Programs and Binary Decision Diagrams*. SIAM, 2000.
- [Wöl03] P. Wölfel. The obdd-size of cographs. Internal Report, FB Informatik 2, Universität Dortmund, 2003.
- [Wri61] E. M. Wright. Counting coloured graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 13:683–693, 1961.