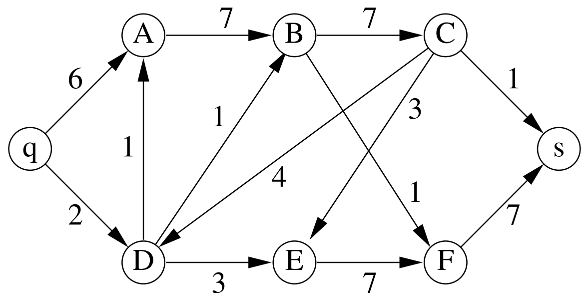
Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 22. April 2004
Abgabe 29. April 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 1

Die Abgabe der Lösungen ist in Gruppen von zwei oder drei Studierenden möglich (und erwünscht). Alle Gruppenmitglieder müssen die abgegebenen Aufgaben vortragen können.

AUFGABE 1 (4 Punkte)**:**
Betrachte das folgende Netzwerk:



Finde einen maximalen Fluss von q nach s. Begründe Deine Wahl.

AUFGABE 2 (6 Punkte)**:**
Führe die folgenden Varianten des Flussproblems auf die Standardversion der Vorlesung zurück:

1. Sowohl den Kanten als auch den Knoten sind Kapazitäten zugeordnet. Für einen zulässigen Fluss muss jetzt zusätzlich gelten:

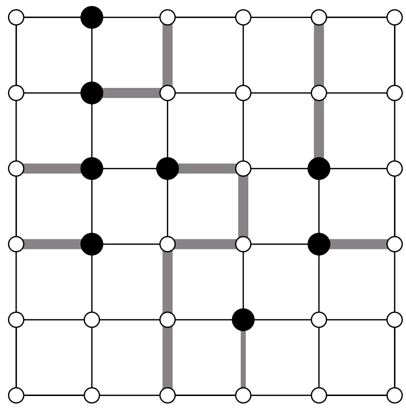
$$\forall_{v \in V \setminus \{q\}}\colon \sum_{u:(u,v)\in E} f(u,v) \le c(v) \qquad \text{und} \qquad \sum_{u:(q,u)\in E} f(q,u) \le c(q),$$

wobei $c\colon V \mapsto \mathbb{N}_0$ die Kapazitäten der Knoten angibt.

2. Es gibt mehrere Quellen und Senken.

3. Das Netzwerk ist ungerichtet. Gib eine Formalisierung für das Problem zur Berechnung maximaler Flüsse auf ungerichteten Netzwerken an, und führe dieses Problem auf die Variante zur Berechnung von maximalen Flüssen auf gerichteten Netzwerken zurück.

AUFGABE 3 (4 Punkte)**:**
Ein Gebäude sei durch ein Gitter modelliert. An m Punkten befinden sich Menschen, die das Gebäude im Falle eines Brandes verlassen müssen. Dazu müssen sie über einen Pfad einen Randknoten erreichen. Es dürfen jedoch keine zwei Fluchtwege gemeinsame Punkte des Gitters benutzen. Das folgende Bild zeigt einen beispielhaften Fluchtplan:



Modelliere das Fluchtproblem als Flussproblem.

AUFGABE 4 (6 Punkte)**:**
Gegeben sei die Tabelle der Fußball Bundesliga, die den Punktestand zu einem bestimmten Zeitpunkt wiedergibt sowie eine Liste der noch ausstehenden Spiele. Wir betrachten die alte Zweipunkteregel, d. h. die siegreiche Mannschaft erhält zwei Punkte, der Verlierer keinen und bei einem Unentschieden erhalten beide Mannschaften je einen Punkt. Das *Meisterschaftsproblem* besteht darin, zu entscheiden, ob eine gegebene Mannschaft noch Meister werden kann.
Modelliere das Meisterschaftsproblem als Flussproblem. Funktioniert Deine Lösung auch mit der Dreipunkteregel (Gewinner 3 Pkt., Verlierer 0 Pkt., Unentschieden je 1 Pkt.)?

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 29. April 2004
Abgabe 6. Mai 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 2

AUFGABE 5 (4 Punkte)**:**
Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

1. Wenn alle Kanten eines Netzwerks paarweise verschiedene Kapazitäten haben, so gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Schnitt.
2. Im Restnetzwerk G_f gilt $rest(u,v) + rest(v,u) = c(u,v)$ für jede Kante $(u,v) \in E$.
3. Wenn alle Kantenkapazitäten mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert werden, ändert sich der minimale Schnitt nicht.
4. Wenn zu allen Kantenkapazitäten eine beliebige positive Zahl addiert wird, ändert sich der minimale Schnitt nicht.

AUFGABE 6 (6 Punkte)**:**
Die ESA möchte auf einem Weltraumflug eine Reihe von Experimenten $\mathcal{E} := \{E_1, \ldots, E_n\}$ durchführen. Für die Durchführung der Experimente stehen die Instrumente $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_m\}$ zur Verfügung, die jeweils Kosten $c_1, \ldots, c_m$ verursachen, wenn sie auf den Flug mitgenommen werden. Für die Durchführung von Experiment $E_i \in \mathcal{E}$ wird eine Teilmenge $T_i \subseteq \mathcal{I}$ der Instrumente benötigt. Um die Kosten zu decken, wirbt die ESA für jedes Experiment $E_i \in \mathcal{E}$ einen Sponsor an, der das Experiment mit d_i bezuschusst.
Wie kann die ESA die Projekte so auswählen, dass der Gewinn (=Summe der Sponsorengelder minus Kosten der nötigen Instrumente) maximiert wird?
Betrachte ein Netzwerk mit Quelle q und Senke s, einem Knoten für jedes Experiment und einem Knoten für jedes Instrument. Die Quelle ist mit den Instrumenten über eine Kante verbunden, deren Kapazität den Kosten des Instruments entsprechen. Analog ist die Senke mit Experimenten verbunden, und die Kapazitäten dieser Kanten entsprechen den Sponsorengeldern. Kanten unbeschränkter Kapazität verbinden Instrumente mit den Experimenten, in denen sie benötigt werden.

(a) Betrachte einen Schnitt (Q, S) endlicher Kapazität. Zeige, dass $T_i \subseteq S$, falls $E_i \in S$.

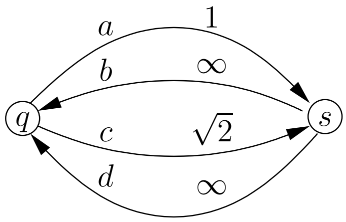
(b) Wie kann man den Nettogewinn anhand des minimalen Schnittes berechnen?

(c) Finde einen Algorithmus, der entscheidet, welche Experimente durchgeführt werden sollen und analysiere dessen Laufzeit.

AUFGABE 7 (4 Punkte)**:**
Beweise formal Beobachtung 2 aus dem Skript: Für jeden Fluss f und jeden Schnitt (Q,S) gilt $w(f) = f(Q,S) \leq c(Q,S)$.

AUFGABE 8 (6 Punkte)**:**
Zeige, dass es einen Graphen und eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen gibt, so dass der Gesamtfluss nicht gegen den maximalen Fluss konvergiert.

(a) Betrachte den folgen Graphen:



Dieser Graph ist zunächst noch keine zulässige Eingabe für das Flussproblem (Multikanten, eingehende Kanten in der Quelle). Dennoch läßt sich die Definition des Flusses und von Fv-Wegen einfach übertragen. Zeige zunächst, dass es in diesem Graphen eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen gibt, die gegen den maximalen Fluss konvergiert, ohne ihn zu erreichen.

(b) Erweitere den Graphen so, dass sich der maximale Fluss vergrößert, aber die unendliche Sequenz noch immer möglich ist.

(c) Erweitere die Konstruktion nun so, dass es keine Multikanten mehr gibt und es nicht mehr nötig ist, Knoten auf Fv-Wegen doppelt zu besuchen. Trotzdem soll eine unendliche Sequenz von Flussvergrößerungen erhalten bleiben.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 6. Mai 2004
Abgabe 13. Mai 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 3

AUFGABE 9 (5 Punkte)**:**
Löse die beiden folgenden Probleme mit Hilfe von Algorithmen für maximale Matchings oder Flüsse.

(a) Eine Gruppe von p Familien geht zum Essen. Um die soziale Interaktion zu erhöhen, wollen sie sich so auf q Tische verteilen, dass keine zwei Mitglieder derselben Familie an einem Tisch sitzen. Familie i hat $a(i)$ Mitglieder und Tisch j hat $b(j)$ Plätze. Falls möglich, finde eine zulässige Zuordnung von Personen zu Tischen, die dieses Ziel erfüllt.

(b) Gegeben seien eine Menge von m Studierenden, die auf k Übungsgruppen verteilt werden sollen. Alle Studierenden wählen Übungsgruppen aus, denen sie zugeteilt werden können. Gesucht ist eine Zuordnung von Studierenden zu Übungsgruppen, die die maximale Übungsgruppengröße minimiert.

AUFGABE 10 (2 Punkte)**:**
Die symmetrische Differenz $\oplus$ ist definiert als $A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Zeige, dass $\oplus$ assoziativ ist, d. h. für Mengen A, B, C gilt $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

AUFGABE 11 (8 Punkte)**:**

(a) Sei M ein inklusions-maximales Matching und M^* ein maximum Matching. Zeige: $|M^*| \leq 2 \cdot |M|$.
Tipp: Wenn man die richtige Idee hat, gibt es einen recht kurzen Beweis.

(b) Warum ist ein Sperrfluss auch im Niveaunetzwerk nicht immer auch ein maximaler Fluss? Gib für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Niveaunetzwerk G mit $O(k)$ Kanten an, so dass in G ein Sperrfluss der Kapazität 1 existiert, der maximale Fluss aber $\Omega(\sqrt{k})$ beträgt.

(c) Warum sind Teil (a) und Teil (b) zu einer Aufgabe zusammengefasst? Was ist die Beziehung zwischen inklusions-maximalen Matchings und maximum Matchings auf der einen Seite und Sperrflüssen und maximalen Flüssen auf der anderen Seite?

AUFGABE 12 (5 Punkte)**:**
Zeige, dass das gewichtete maximum Matching Problem und das Min-cost Matching Problem aufeinander polynomiell reduzierbar sind.

(a) Reduziere die beiden Probleme aufeinander unter der Annahme, dass die Graphen vollständig sind.

(b) Reduziere die Varianten für allgemeine Graphen auf die Varianten für vollständige Graphen.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 13. Mai 2004
Abgabe Freitag, 21. Mai 2004 um 10:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 4

AUFGABE 13 (5 Punkte):
Betrachte das folgende LP:
Maximiere die Zielfunktion

$$f(x) = x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 6 && (1)\\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 28 && (2)\\ 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 20 && (3) \end{aligned}$$

(a) Löse das LP graphisch.

(b) Entferne die Nebenbedingung (2). Was passiert mit der Lösung?

(c) Entferne die Nebenbedingung (3). Was passiert nun mit der Lösung?

AUFGABE 14 (5 Punkte):
MULTICOMMODITY-FLOW–Probleme sind Erweiterungen des einfachen Flussproblems und lassen sich wie folgt umschreiben: Es gibt mehrere Quelle-Senke-Paare (q_i, s_i), $1 \leq i \leq I$, zwischen denen jeweils ein Fluss f_i fließt. Die Kantenkapazitäten beschränken dann den Gesamtfluss aller „Commodities“ (Güter) über die jeweilige Kante. Wir betrachten zwei Varianten, die sich in der zu maximierenden Größe unterscheiden:

1. Absolute Variante: Maximiere den Gesamtfluss, also die Summe der Flüsse.

2. Relative Variante: Es gibt zusätzlich Bedarfe d_i, $1 \leq i \leq I$, die den Fluss der jeweiligen Commodity beschränken. Der relative Fluss für Commodity i ist f_i/d_i. Maximiere das Minimum der relativen Flüsse.

Formuliere beide Varianten als LP und bringe sie in Normalform.

AUFGABE 15 (5 Punkte):
Zeige, dass der Matching-Algorithmus von Hopcroft und Karp dem Flussalgorithmus von Dinic entspricht.

(a) Beweise, dass eine maximale Menge kürzester knotendisjunkter Wege im gerichteten Graphen G_M einem Sperrfluss im Niveaugraphen R'_M entspricht.

(b) Beweise, dass ein Sperrfluss im Niveaugraphen R'_M einer Menge knotendisjunkter Wege in G_M entspricht.

AUFGABE 16 (5 Punkte)**:**
Betrachte das Problem BIPARTIT-VERTEX-COVER: Sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph. Finde eine kleinste Knotenmenge $C \subseteq U \cup W$, so dass für alle Kanten $(u, w) \in E$ gilt $u \in C$ oder $w \in C$.
Beweise: Wenn C eine kleinste Knotenmenge mit der obigen Eigenschaft ist und M ein maximum Matching auf G ist, dann gilt $|C| = |M|$. In Worten: Zeige „Minimum-Vertex-Cover=Maximum-Matching“.
Tipp: Benutze das „Min-Cut=Max-Flow“–Theorem.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 17. Mai 2004
Abgabe 27. Mai 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 5

AUFGABE 17 (2 Punkte)**:**
Betrachte einen naiven Algorithmus zur Lösung von LPs. Der Algorithmus berechnet alle Schnittpunkte der Hyperebenen und berechnet den Wert der Zielfunktion, falls der Schnittpunkt ein Knoten des Lösungspolyhedrons ist. Schließlich liefert er einen Knoten mit maximalem Zielfunktionswert. Wieviele Schnittpunkte gibt es höchstens? Beurteile die Effizienz des Algorithmus.

AUFGABE 18 (5 Punkte)**:**
Finde ein LP, für das der Simplex-Algorithmus exponentielle Laufzeit haben kann.

(a) Betrachte den n-dimensionalen Hyperwürfel. Finde Nebenbedingungen, so dass das Lösungspolyhedron diesem Würfel entspricht.

(b) Die Zielfunktion kann durch eine Gerade (mit Richtung) im $\mathbb{R}^n$ repräsentiert werden. Es ist daher ausreichend, zwei Punkte P_1 und P_2 anzugeben, die diese Gerade bestimmen.

Finde durch Angabe von P_1 und P_2 eine geeignete Zielfunktion, so dass es

(c) einen exponentiell langen (in n) kreisfreien Weg von P_1 nach P_2 gibt, auf dem sich der Wert der Zielfunktion nicht verkleinert. Wie sieht dieser Weg aus?

Tipp 1: P_1 und P_2 sind Knoten des Würfels.
Tipp 2: Gehe zur Konstruktion des Weges induktiv vor.

Diese Konstruktion heißt Klee-Minty-Cube und kann auch noch so verändert werden, dass die Wege echt verbessernd sind.

AUFGABE 19 (7 Punkte)**:**
Wir betrachten LPs von besonders einfachem Charakter und zeigen, dass diese mit einem Algorithmus für das Kürzeste-Wege-Problem gelöst werden können.

Betrachte ein LP mit n Variablen und m Nebenbedingungen, bei dem die Nebenbedingungsmatrix in jeder Zeile genau eine 1 und eine -1 enthält. Dann haben die Nebenbedingungen die Form

$$x_j - x_i \leq b_k.$$

Es handelt sich also um Differenzbedingungen. Betrachte den gewichteten gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der einen Knoten für jede Variable enthält sowie einen zusätzlichen Startknoten v_0. Die Nebenbedingungen werden zu gerichteten Kanten und je eine Kante verbindet v_0 mit allen anderen Knoten. Formal ist ist $V := \{v_0\} \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$ und

$$E \;:=\; \{(v_i, v_j) \mid x_j - x_i \leq b_k \text{ ist eine Nebenbedingung}\} \cup (\{v_0\} \times \{v_1, \ldots, v_n\}).$$

Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ hat Kante (v_i, v_j) das Gewicht $w(v_i, v_j) = b_k$, wobei b_k die Schranke der zugehörigen Nebenbedingung ist, und die Kanten (v_0, v_i), $1 \leq i \leq n$ haben das Gewicht $w(v_0, v_i) = 0$. Zeige:

(a) Wenn der Vektor $(x_1, \dots, x_n)$ eine zulässige Lösung ist, so ist auch der Vektor $(x_1 + c, \dots, x_n + c)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine zulässige Lösung.

(b) Falls G keinen Kreis mit negativem Gesamtgewicht enthält, ist der Vektor

$$x := (d(v_0, v_1), \dots, d(v_0, v_n))$$

eine zulässige Lösung, wobei $d(v, w)$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen v und w in G ist.

(c) Falls es in G einen Kreis mit negativem Gewicht gibt, existiert keine Lösung.

(d) Gib einen Algorithmus an, um das LP zu lösen und analysiere dessen Laufzeit.

AUFGABE 20 (6 Punkte)**:**
Formuliere die folgenden drei Probleme als ILP:

(a) SAT,

(b) Travelling Salesperson Problem (TSP),

(c) Spannbaum.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 27. Mai 2004
Abgabe 3. Juni 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 6

Das im Algorithmus SeideLP verwendete Lösungskonzept kann auch auf andere Problemstellungen angewendet werden. Wir geben ein Beispiel. Aufgaben 21 bis 24 auf diesem Zettel beziehen sich auf den im Folgenden beschriebenen Algorithmus.

Gegeben sei eine Menge M mit m Punkten im $\mathbb{R}^d$. Wir suchen die kleinste umschließende Kugel für die Punkte in M. Diese Kugel bezeichnen wir mit $\text{ball}(M)$. Eine Menge $B \subseteq M$ bezeichnen wir als *Basis* von M, falls $\text{ball}(M) = \text{ball}(B)$ gilt. Man kann zeigen, dass es immer eine Basis der Kardinalität höchstens $d+1$ gibt. Wir suchen eine *minimale Basis*, also eine Basis, aus der kein weiterer Punkt entnommen werden kann, ohne die Basiseigenschaft zu zerstören. Die minimale Basis muß nicht eindeutig sein. Falls eine minimale Basis B bekannt ist, können wir die gesuchte Kugel $\text{ball}(B) = \text{ball}(M)$ leicht berechnen. Deshalb sind wir an einer minimalen Basis interessiert.
Der folgende Algorithmus liefert zu einer Punktmenge M eine minimale Basis B. Der Algorithmus ist rekursiv. Als Eingabe erhält der Algorithmus eine Punktmenge M sowie eine schon teilweise berechnete minimale Basis B. Der Algorithmus soll diese Teilbasis so ergänzen, dass sie am Ende einer vollständigen minimalen Basis für die Punkte in $B \cup M$ entspricht. Der initiale Aufruf startet mit $B = \emptyset$. Im Verlauf des Algorithmus werden nach und nach geeignete Punkte von M nach B verschoben, bis B zu einer minimalen Basis herangewachsen ist. Ein Algorithmus zur Berechnung der Funktion $\text{ball}(B)$ sei bereits definiert.

Algorithmus *minBasis*(M, B)

```
if M = ∅ then
  return B
else
  Wähle einen Punkt p ∈ M zufällig gleichverteilt
  Berechne rekursiv B' := minBasis(M \ {p}, B)
  if p ∈ ball(B') then
    return B'
  else
    return minBasis(M \ {p}, B ∪ {p})
  end if
end if
```

AUFGABE 21 (2 Punkte)**:**
Zeige, dass die minimale Kugel eindeutig bestimmt ist.
Tipp: Widerspruchsbeweis.

AUFGABE 22 (5 Punkte)**:**
Warum berechnet der Algorithmus *minBasis*$(M, \emptyset)$ eine eine minimale Basis von M?

(a) Vereinfache zunächst und beweise die Korrektheit unter der Annahme, dass es eine eindeutige minimale Basis B gibt.

(b) Gib ein Beispiel für die Existenz mehrerer minimaler Basen.

(c) Begründe die Korrektheit des Algorithmus auch bei der Existenz mehrerer minimaler Basen.

AUFGABE 23 (4 Punkte)**:**
Berechne die erwartete Laufzeit des Algorithmus *minBasis* unter der Annahme, dass alle einfachen Schritte wie etwa das Entfernen und Hinzufügen von Punkten zu Mengen oder auch der Test $p \in \text{ball}(B')$ in Zeit $poly(d)$ ausgeführt werden können, wobei $poly(\cdot)$ eine geeignete polynomielle Funktion ist.

AUFGABE 24 (4 Punkte)**:**
Es gibt zahlreiche andere geometrische Probleme, die nach dem gleichen Prinzip gelöst werden können.

(a) Beispielsweise ist die Größe der minimalen Basis bei volumen-minimalen Ellipsen höchstens $d(d+3)/2$. Wie wirkt sich die Basisgröße im Allgemeinen auf die Laufzeit des Algorithmus *minBasis* aus?

(b) Wie könnte man die „Basis“ beim Algorithmus SeideLP zur Lösung von Linearen Programmen definieren?

AUFGABE 25 (5 Punkte)**:**
Sei $f(d) = d \cdot f(d-1) + d^2 + d$ und $f(1) = 1$. Zeige, dass es eine Konstante $k_0 > 0$ gibt, so dass $f(d) \leq k_0 d!$ für alle $d \geq 1$ gilt.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 3. Juni 2004
Abgabe 11. Juni 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 7

AUFGABE 26 (5 Punkte)**:**
Eine Variante des randomisierten Min-Cut-Algorithmus wähle nicht, wie üblich, zufällig eine Kante, um diese zu kontrahieren, sondern wähle uniform zufällig zwei Knoten aus, und verschmelze sie zu einem einzelnen Knoten. Zeige, dass es Eingaben gibt, auf denen dieser modifizierte Algorithmus nur mit exponentiell kleiner Wahrscheinlichkeit einen minimalen Schnitt findet.

AUFGABE 27 (5 Punkte)**:**
Betrachte einen Graphen mit n Knoten.

(a) Wie kann man mit Hilfe von $O(n^2)$ Aufrufen eines Max-Flow-Algorithmus den Min-Cut berechnen?

(b) Geht das auch mit nur $n-1$ Aufrufen?

AUFGABE 28 (5 Punkte)**:**
Sei n die Anzahl der Knoten in einem Graphen.

(a) Finde einen Graphen, in dem es $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene minimale Schnitte gibt.

(b) Zeige, dass es nicht mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene minimale Schnitte geben kann.

AUFGABE 29 (5 Punkte)**:**
Nachdem ein Schiff einen Hafen angelaufen hat, gehen die 40 Matrosen erholungssuchend nach langen Wochen auf See von Bord. Später in der Nacht kehren sie nacheinander zurück und wählen, da sie nicht mehr zu weitergehender Orientierung fähig sind, zufällig eine leere Kajüte aus, um darin die Nacht zu verbringen. Wie groß ist die erwartete Anzahl von Matrosen, die in ihrer eigenen Kajüte schlafen?

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 7. Juni 2004
Abgabe 17. Juni 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 8

AUFGABE 30 (4 Punkte)**:**
Betrachte die Rekursionsformel

$$T(n) = 2T\left(1 + \left\lceil \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil\right) + n^2.$$

Löse diese Rekursionsformel nach dem „Kochrezept“ (Seite 22) im Skript.

AUFGABE 31 (3 Punkte)**:**
Wie kann man in Zeit $O(n)$ die Kontraktion einer Kante, insbesondere auch die Auswahl der Kante, implementieren. Welche Datenstrukturen kann man benutzen?
Gehe davon aus, dass es möglich ist, in konstanter Zeit eine Zahl zufällig gleichverteilt aus der Menge $\{1, \ldots, k\}$ für beliebiges k zu ziehen.

AUFGABE 32 (6 Punkte)**:**
Wir gönnen uns einen alternativen Blick auf den Rekursionsbaum des Algorithmus *fastcut*. Dieser Baum ist ein vollständiger Binärbaum der Höhe $\Theta(\log n)$. Angenommen, jede Kante in diesem Baum bricht mit Wahrscheinlichkeit q, und sei $\bar{q} = 1 - q$. Sei $p(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Pfad von einem gegebenen Knoten v der Höhe k zu einem Blatt im Teilbaum unterhalb von v gibt, wobei Blätter die Höhe 0 haben. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass

$$p(k) = 1 - (1 - \bar{q} \cdot p(k-1))^2$$

für $k \geq 1$ ist, und $p(0) = 1$. Außerdem haben wir diese Rekurrenz für den Fall $q = \frac{1}{2}$ gelöst und gezeigt, dass in diesem Fall $p(k) = \Omega(\frac{1}{k})$ ist.

(a) Angenommen, $q = \frac{1}{2}$. Zeige: $p(k) = O(\frac{1}{k})$.

(b) Angenommen, $q = \frac{1}{2} - \epsilon$, für konstantes $\epsilon > 0$. Zeige $p(k) \geq c$, wobei $c \in (0, 1)$ ein geeigneter konstanter Term ist, d.h. ein Term, der nur von ϵ aber nicht von k abhängt.

(c) Angenommen, $q = \frac{1}{2} + \epsilon$, für konstantes $\epsilon > 0$. Zeige $p(k) \leq c^k$, wobei $c \in (0, 1)$ ein geeigneter konstanter Term ist.

AUFGABE 33 (3 Punkte)**:**
Die Lösung für Aufgabe 32(b) zeigt, dass man die Erfolgswahrscheinlichkeit von Algorithmus *fastcut* signifikant erhöhen kann, wenn man die Fehlerwahrscheinlichkeit q nur ein wenig verringert. Zum Beispiel, wenn wir Zeile 3 des Algorithmus in

$$t := \lceil 1 + 0.8n \rceil$$

verändern, dann ist $\bar{q} = 0.8^2 = 0.64$ und die Lösung für Aufgabe 32(b) zeigt, dass *fastcut* konstante Erfolgswahrscheinlichkeit erreicht. Ist diese Veränderung also eine gute Idee?

AUFGABE 34 (4 Punkte)**:**
Betrachte einen Kreis mit Umfang 1. Auf diesen Kreis werden zufällig gleichverteilt n Punkte geworfen.

(a) Wie groß ist die erwartete Intervalllänge?

(b) Wie groß ist die erwartete Länge des Intervalls, in dem der 12-Uhr-Punkt liegt?

Tipp: Es ist keine lange Rechnung notwendig.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 17. Juni 2004
Abgabe 24. Juni 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 9

AUFGABE 35 (5 Punkte)**:**
Anlässlich der Fussball EM steckt in jedem Duplo eines von n Sammelbildchen (zufällig gleichverteilt). Wie viele Duplos musst Du im Erwartungswert kaufen, bis Du alle Bilder zusammen hast?

(a) Sei T_i die Anzahl von Duplos, die Du kaufen musst, wenn Du bereits i Bilder gesammelt hast, um ein neues Bild zu erhalten. Wie groß ist $\mathrm{E}[T_i]$?

(b) Sei T die erwartete Anzahl von Duplos bis zum Erhalt aller Bildchen. Wie groß ist $E[T]$?

Tipp: Benutze die Linearität des Erwartungswertes und die harmonische Reihe.

(c) Zeige zusätzlich: $T = O(n \log n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit.

AUFGABE 36 (5 Punkte)**:**
Gegeben sei ein Las Vegas Algorithmus A. Sei $f(n)$ eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit von A bei Eingabegröße n. Um Algorithmus A mit der im Skript beschriebenen Methode in einen Monte Carlo Algorithmus B mit Erfolgswahrscheinlichkeit B zu transformieren, der eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $99,9\%$ hat, muss der Algorithmus für $1000 \cdot f(n)$ Schritte laufen. Geht das mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsamplifikation auch schneller?

AUFGABE 37 (5 Punkte)**:**
Wir werfen n Bälle uniform zufällig in n Kisten. Sei $A_i = A_i(n)$ die Anzahl der Kisten mit i Bällen.

(a) Analysiere die erwartete Anzahl der Kisten, die keinen Ball erhalten. Berechne insbesondere $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[A_0/n]$. Hinweis: Berechne zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kiste leer bleibt. Die Gleichung $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$ ist dabei nützlich. Aus dieser Wahrscheinlichkeit lässt sich der gesuchte Erwartungswert mit Hilfe der Linearität des Erwartungswertes herleiten.

(b) Berechne $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[A_i/n]$, für festes $i \geq 1$. Hinweis: Gib ähnlich wie in Aufgabe (a) vor. Verwende Binomialkoeffizienten zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten. Für festes $i \geq 0$ gilt $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x-i} = \frac{1}{e}$.

AUFGABE 38 (5 Punkte)**:**
Drei Freunde (Andreas, Bärbel und Christian) nehmen an einer Fernsehshow teil. In der letzten Runde wird jedem der drei Freunde ein Hut mit einer zufälligen Farbe aufgesetzt, rot oder grün, jeweils unabhängig mit 50% Wahrscheinlichkeit.

Jeder der drei sieht die Farben der anderen, nicht aber seine eigene, und darf einen verdeckten Tipp über die Farbe des eigenen Hutes abgeben oder sich enthalten. Die drei Freunde gewinnen eine Kaffeemaschine, wenn mindestens einer von ihnen einen richtigen Tipp abgibt und keiner einen falschen Tipp.
Wie sollen sich die drei Freunde verhalten und welche Erfolgswahrscheinlichkeit können sie bei geschickter Strategiewahl erzielen? – Unterhalten und Zeichengeben während des Spiels sind verboten. Vorabsprachen zur Verabredung einer Strategie sind erlaubt. Behauptung: weit mehr als 50% Erfolgswahrscheinlichkeit sind möglich.

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 24. Juni 2004
Abgabe 1. Juli 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

SoSe 2004

Blatt 10

AUFGABE 40 (5 Punkte)**:**
Betrachte die drei Varianten von VERTEX-COVER Probleme

- EVC – Entscheidungsvariante: „Gibt es ein Vertex Cover der Kardinalität k?“
- OVC – Optimierungsvariante: „Welche Kardinalität hat das kleinste Vertex-Cover?“
- MINVC – Konstruktion der Lösung: „Finde eine kleinstes Vertex-Cover und gib es aus.“

Zeige, dass die Varianten polynomiell aufeinander reduzierbar sind. (Dabei ist die Richtung MINVC $\Rightarrow$ OVC $\Rightarrow$ EVC trivial.)

(a) Nimm an, dass Du einen Algorithmus für EVC mit Laufzeit $poly(n)$ zur Verfügung hast. Gib einen Polynomialzeitalgorithmus für OVC an.

(b) Nimm an, dass Du einen Algorithmus für OVC mit Laufzeit $poly(n)$ zur Verfügung hast. Gib einen Polynomialzeitalgorithmus für MINVC an.

Zeige jeweils auch die Korrektheit und begründe, warum der konstruierte Algorithmus wieder polynomielle Laufzeit hat.

AUFGABE 41 (5 Punkte)**:**

(a) Finde einen Graphen, für den der vorgestellte Algorithmus Approx-VC aus dem Skript immer eine suboptimale Lösung liefert.

(b) Betrachte den Greedy-Set-Cover Algorithmus aus dem Skript. Finde eine Klasse von ungewichteten Set-Cover Instanzen, für die die erreichte Approximationsgüte nur $O(\log n)$ ist.

AUFGABE 42 (5 Punkte)**:**
Wir werfen $n \log n$ Bälle in n Kisten. Im Erwartungswert erhält jede Kiste offensichtlich $\log n$ Bälle.
Zeige: In der Kiste mit den meisten Bällen landen ebenfalls nur $O(\log n)$ Bälle m. h. W.
Tipp: Folge dem Beweis von Satz 10 aus dem Skript.

AUFGABE 43 (5 Punkte)**:**
Der randomisierte Routing-Algorithmus berechnet Wege mit Congestion $O(opt \cdot \log m)$ m. h. W. Der Algorithmus geht davon aus, dass alle Kanten gleichartig sind. Dies ist häufig nicht der

Fall, sondern Kanten haben beispielsweise Bitraten. Diese Bitraten modellieren wir in Form von Kantengewichten $b : E \to \mathbb{N}$. Die Congestion einer Kante e definieren wir entsprechend als

$$C(e) = \sum_{i\in[k]:e\in P_i} \frac{d_i}{b(e)}.$$

Kanten mit höherer Bitrate können also bei gleicher Congestion mehr Daten übertragen. Im gleichen Sinne ändern wir das LP für das Mehrgüterflussproblem. Dadurch erhalten wir die modifizierte Bedingung

$$\forall e \in E : \sum_{i\in[k]} f_{i,e} \frac{d_i}{c(e)} \leq C.$$

Alle anderen Details lassen wir zunächst unverändert.

(a) Beschreibe ein einfaches Beispielnetzwerk mit einem Fluss, so dass nach dem randomisierten Runden die Congestion mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf $opt(m-1)$ ansteigt.

Tipp: Das Netzwerk ist ein gerichteter Multigraph bestehend aus nur zwei Knoten mit m parallelen Kanten mit geeigneten Gewichten.

(b) Wo versagt der in der Vorlesung präsentierte Beweis, wenn man gewichtete Kanten erlaubt?

(c) Wir stellen uns vor, ein Orakel verrät uns die optimale Congestion, also den Wert von opt. Wie können wir den Algorithmus reparieren, so dass wir wieder eine $O(\log m)$-Approximation erhalten?

Tipp: Modifiziere das lineare Programm. Welche Kanten sollten für welche Commodity verboten werden?

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 8. Juli 2004
Abgabe 15. Juli 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 11

AUFGABE 44 (5 Punkte)**:**
Ein FPAS ist ein Approximationsschema für ein Optimierungsproblem Π, dessen Laufzeit polynomiell sowohl in $|I|$ als auch in $1/\epsilon$ ist, wobei I eine Eingabe für Π und ϵ den Fehlerparameter bezeichnet. Beachte, dass die Laufzeit eines FPAS polynomiell im Wert von $1/\epsilon$ sein darf, und nicht polynomiell in der Länge der Binärdarstellung $\log(1/\epsilon)$.
Sei ein SuperPAS ein Approximationsschema, dessen Laufzeit polynomiell sowohl in $|I|$ als auch in $\log(1/\epsilon)$ ist. Zeige, dass unter den Annahmen von Satz 12 aus Kapitel 4 gilt: Falls Π NP-hart ist, hat Π kein SuperPAS.
Daraus folgt, dass NP-harte Probleme kein SuperPAS erlauben, und daher ein FPAS das bestmögliche Approximationsschema darstellt.

AUFGABE 45 (5 Punkte)**:**
Für das Scheduling-Problem auf m Maschinen seien $n = 2m$ Jobs gegeben, und es gelte $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$.

(a) Angenommen man weiß, dass der optimale Schedule jeder Maschine genau 2 Jobs zuordnet. Zeige, dass die Zuordnung „Maschine i bekommt die Jobs i und $n - i + 1$“ (für $i = 1 \ldots m$) ein optimaler Schedule ist.

(b) Es seien nun beliebig viele Jobs pro Maschine erlaubt, wobei insgesamt weiterhin $2m$ Jobs vorhanden sind. Zeige: Es gibt eine Eingabe, für die die Heuristik Longest Processing Time (LPT) nicht optimal arbeitet.

AUFGABE 46 (5 Punkte)**:**

(a) Gib einen pseudopolynomiellen Algorithmus zur Lösung des Minimum Makespan Scheduling Problems auf $m = 3$ Maschinen an.

Tipp: Definiere eine boolesche Funktion f folgendermaßen. Es gilt: $f(a_1, a_2, a_3, i) = 1 \Leftrightarrow$ „Füllstand (a_1, a_2, a_3) ist exakt erreichbar mit den Jobs $1 \ldots i$“.

(b) Entwirf unter Verwendung des Algorithmus aus (a) ein FPAS zur Approximation des Minimum Makespan Scheduling Problems auf 3 Maschinen.

(c) Wie steht dies im Verhältnis zur starken NP-Härte von Minimum Makespan Scheduling?

AUFGABE 47 (5 Punkte)**:**

(a) Zeige, dass das allgemeine TSP stark NP-hart ist.

Tipp: Reduziere Hamilton-Kreis auf das TSP in unärer Codierung.

(b) Gilt obige Aussage auch für das metrische TSP?

Berthold Vöcking
Simon Fischer, Christine Heller

Dortmund, den 15. Juli 2004
Abgabe 22. Juli 2004 um 14:00

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 12

AUFGABE 48 (6 Punkte)**:**
Beweise die drei Sätze auf Seite 8 des Skripts. Alle drei Sätze beziehen sich auf Online-Algorithmen für das Paging-Problem.

(a) FIFO ist *kein* Marking-Algorithmus.

(b) FIFO ist (dennoch) k-competitive.

(c) LIFO ist nicht competitive.

AUFGABE 49 (5 Punkte)**:**
Betrachte das folgende Problem: Von zwei Rechnern a und b aus soll auf eine gemeinsame Datei zugegriffen werden. Die Datei kann entweder auf Rechner a oder auf Rechner b abgelegt werden.
Wird auf die Datei zugegriffen, während sie auf dem eigenen Rechner liegt, verursacht dies keine Kosten. Wird auf die Datei zugegriffen, während sie auf dem entfernten Rechner liegt, verursacht dies Kosten 1. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, eine Kopie der Datei auf dem lokalen Rechner anzulegen, und die Version auf dem entfernten Rechner zu löschen. Dies verursacht zusätzlich Kosten 1. Dadurch können möglicherweise in der Zukunft Kosten gespart werden. Mögliche Eingabesequenzen sind Sequenzen von Zugriffen der beiden Rechner, also Wörter über $\{a, b\}$.
Finde einen online-Algorithmus, der 4-competitive ist und beweise dies.

AUFGABE 50 (5 Punkte)**:**
Betrachte das Intervall Rucksack Problem: Wie beim bekannten Rucksack Problem sind n Objekte mit Nutzen- und Gewichtswerten gegeben. Zusätzlich zu der bekannten oberen Gewichtsschranke G_1 gibt es nun noch eine untere Gewichtsschranke G_2. Gesucht ist eine Bepackung mit maximalem Nutzen, die beide Gewichtsschranken respektiert.

(a) Finde einen pseudopolynomiellen Algorithmus für das Intervall Rucksack Problem.

(b) Zeige, dass es für kein $\alpha(n) > 0$ einen Algorithmus geben kann, der in polynomiell vielen Schritten eine $\alpha(n)$-Approximation für dieses Problem berechnet, es sei denn, $P = NP$.

AUFGABE 51 (4 Punkte)**:**
Du möchtest in den Semesterferien an der Adria Surfen lernen. Du hast die Möglichkeit, ein Surfbrett für 30 € pro Tag oder für 330 € für die ganze Saison zu mieten. Wenn Du das Surfbrett gleich am ersten Tag für die ganze Saison mietest, könnte es passieren, dass Du feststellst, dass Surfen nicht Deine Sache ist. Du hättest dann Kosten von 330 €, obwohl 30 € ausreichend gewesen wären, d. h. einen Verlustfaktor von 11. Deine Entscheidung wird dadurch erschwert, dass Du jeden Tag mit dem Einsetzen der jährlichen Algenplage rechnen musst, so dass Du nicht weißt, wie lang Dein Urlaub noch dauert. Es scheint, egal wie Du Dich verhältst, Deine Entscheidung ist beliebig schlecht.
Finde eine Strategie, bei der Du höchstens doppelt so viel ausgeben musst wie jemand, der die Zukunft kennt, also genau weiß, an welchem Tag die Algenplage eintreten wird.