

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie
SoSe 2004
Blatt 5

AUFGABE 17 (2 Punkte):

Betrachte einen naiven Algorithmus zur Lösung von LPs. Der Algorithmus berechnet alle Schnittpunkte der Hyperebenen und berechnet den Wert der Zielfunktion, falls der Schnittpunkt ein Knoten des Lösungspolyhedrons ist. Schließlich liefert er einen Knoten mit maximalem Zielfunktionswert. Wieviele Schnittpunkte gibt es höchstens? Beurteile die Effizienz des Algorithmus.

AUFGABE 18 (5 Punkte):

Finde ein LP, für das der Simplex-Algorithmus exponentielle Laufzeit haben kann.

- Betrachte den n -dimensionalen Hyperwürfel. Finde Nebenbedingungen, so dass das Lösungspolyhedron diesem Würfel entspricht.
- Die Zielfunktion kann durch eine Gerade (mit Richtung) im \mathbb{R}^n repräsentiert werden. Es ist daher ausreichend, zwei Punkte P_1 und P_2 anzugeben, die diese Gerade bestimmen. Finde durch Angabe von P_1 und P_2 eine geeignete Zielfunktion, so dass es
- einen exponentiell langen (in n) kreisfreien Weg von P_1 nach P_2 gibt, auf dem sich der Wert der Zielfunktion nicht verkleinert. Wie sieht dieser Weg aus?

Tipp 1: P_1 und P_2 sind Knoten des Würfels.

Tipp 2: Gehe zur Konstruktion des Weges induktiv vor.

Diese Konstruktion heißt Klee-Minty-Cube und kann auch noch so verändert werden, dass die Wege echt verbessernd sind.

AUFGABE 19 (7 Punkte):

Wir betrachten LPs von besonders einfachem Charakter und zeigen, dass diese mit einem Algorithmus für das Kürzeste-Wege-Problem gelöst werden können.

Betrachte ein LP mit n Variablen und m Nebenbedingungen, bei dem die Nebenbedingungsmatrix in jeder Zeile genau eine 1 und eine -1 enthält. Dann haben die Nebenbedingungen die Form

$$x_j - x_i \leq b_k.$$

Es handelt sich also um Differenzbedingungen. Betrachte den gewichteten gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der einen Knoten für jede Variable enthält sowie einen zusätzlichen Startknoten v_0 . Die Nebenbedingungen werden zu gerichteten Kanten und je eine Kante verbindet v_0 mit allen anderen Knoten. Formal ist $V := \{v_0\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ und

$$E := \{(v_i, v_j) \mid x_j - x_i \leq b_k \text{ ist eine Nebenbedingung}\} \cup (\{v_0\} \times \{v_1, \dots, v_n\}).$$

Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ hat Kante (v_i, v_j) das Gewicht $w(v_i, v_j) = b_k$, wobei b_k die Schranke der zugehörigen Nebenbedingung ist, und die Kanten (v_0, v_i) , $1 \leq i \leq n$ haben das Gewicht $w(v_0, v_i) = 0$. Zeige:

(a) Wenn der Vektor (x_1, \dots, x_n) eine zulässige Lösung ist, so ist auch der Vektor $(x_1 + c, \dots, x_n + c)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine zulässige Lösung.

(b) Falls G keinen Kreis mit negativem Gesamtgewicht enthält, ist der Vektor

$$x := (d(v_0, v_1), \dots, d(v_0, v_n))$$

eine zulässige Lösung, wobei $d(v, w)$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen v und w in G ist.

(c) Falls es in G einen Kreis mit negativem Gewicht gibt, existiert keine Lösung.

(d) Gib einen Algorithmus an, um das LP zu lösen und analysiere dessen Laufzeit.

AUFGABE 20 (6 Punkte):

Formuliere die folgenden drei Probleme als ILP:

(a) SAT,

(b) Travelling Salesperson Problem (TSP),

(c) Spannbaum.