Detlef Sieling Dortmund, den 8.11.2004

Übungen zur Vorlesung
Quantenrechner: Algorithmen und Komplexität
Wintersemester 2004/2005
Blatt 4

Aufgabe 4.1

a) Berechne die Diagonaldarstellung $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i |i\rangle\langle i|$ der Pauli-Matrix X.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf den komplexen Zahlen und sei $A = \sum_{i=1}^{n} a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ die Diagonaldarstellung der Matrix A. Wir erweitern nun f zu einer Funktion, die unitär diagonalisierbare Matrizen auf unitär diagonalisierbare Matrizen abbildet, indem wir $f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)|a_i\rangle\langle a_i|$ definieren.
Berechne die Matrix $\sqrt{X}$.

c) Zeige, dass für alle hermiteschen Matrizen A die Gleichung $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$ gilt.

d) Seien A und B Matrizen mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bzw. $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Was sind die Eigenwerte von $A \otimes B$?

e) Zeige, dass jede hermitesche Matrix A nur reelle Eigenwerte hat. Zeige weiterhin, dass die Spur von A gleich der Summe der Eigenwerte ist.

Aufgabe 4.2

Sei P eine hermitesche Matrix. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) P ist eine Projektion.

b) Die Eigenwerte von P haben nur die Werte Null oder Eins.

c) $P^2 = P$.

Aufgabe 4.3

Sei ρ eine Dichtematrix, d. h., ρ ergibt sich als $\sum_{i=1}^{n} p_i |i\rangle\langle i|$ für $p_1, \ldots, p_n \in [0, 1]$ mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$ und eine ON-Basis $|1\rangle, \ldots, |n\rangle$.

a) Zeige, dass $\mathrm{tr}(\rho^2) \leq 1$ gilt.

b) Zeige, dass ρ genau dann einen reinen Zustand beschreibt, wenn $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ ist.

c) Zeige: Die $n \times n$-Matrix A ist genau dann eine Dichtematrix über $\mathbb{C}^n$, wenn A hermitesch ist, wenn $\mathrm{tr}(A) = 1$ gilt und wenn alle Eigenwerte größer oder gleich Null sind.

Aufgabe 4.4

Sei

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

ein Zustandsoperator bzw. eine Dichematrix.

a) Beschreibt die Matrix ρ einen reinen oder einen gemischten Zustand?

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Messergebnisse, wenn eine Messung bezüglich der Bell-Basis

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

auf einem System mit der Dichtematrix ρ ausgeführt wird.

c) Berechne die partielle Spur von ρ über das Teilsystem, das aus dem ersten (bzw. dem zweiten) Qubit besteht.