

Übungen zur Vorlesung
Quantenrechner: Algorithmen und Komplexität
Wintersemester 2004/2005
Blatt 1

Aufgabe 1.1

Beweise die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen und Vektoren über komplexen Zahlen. Die wichtigsten Notationen im Zusammenhang mit komplexen Zahlen sind auf der Rückseite zusammengefasst.

- a) $(ab)^* = a^*b^*$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.
- b) $|e^{i\varphi}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.
- c) $\langle v, cw \rangle = c\langle v, w \rangle$ für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ und alle $c \in \mathbb{C}$.
- d) $\langle cv, w \rangle = c^*\langle v, w \rangle$ für alle Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^n$ und alle $c \in \mathbb{C}$.
- e) Stelle \sqrt{i} in der Form $\alpha + \beta i$ dar.

Aufgabe 1.2

Wir definieren die so genannten Pauli-Matrizen:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun das Qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ in der Blochsphäre. Finde (durch elementares Rechnen) heraus, durch welche Drehungen oder Spiegelungen wir aus der Darstellung von $|\psi\rangle$ in der Blochsphäre die Darstellungen der Qubits $X|\psi\rangle$, $Y|\psi\rangle$ und $Z|\psi\rangle$ in der Blochsphäre erhalten.

Zur Vereinheitlichung der Notation und zur Wiederholung geben wir im Folgenden die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften bezüglich komplexer Zahlen an. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann in Rechteckkoordinaten ($z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$) oder in Polarkoordinaten ($z = ce^{i\varphi}$, $c, \varphi \in \mathbb{R}$) dargestellt werden. Dabei ist $e^{i\varphi}$ definiert durch $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Beispiel: $\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2}(\sqrt{1/2} + i\sqrt{1/2}) = 1 + i$.

z^* ist die zu z konjugiert komplexe Zahl, d.h., $(a + bi)^* = a - bi$ bzw. $(ce^{i\varphi})^* = ce^{-i\varphi}$. Der Betrag $|z|$ der komplexen Zahl z ist $(z^*z)^{1/2}$. Beachte, dass z^*z und damit auch der Betrag von z immer eine nichtnegative reelle Zahl ist.

Die zu der Matrix A adjungierte Matrix A^\dagger entsteht aus A , indem A transponiert wird und im Resultat jeder Eintrag durch die konjugiert komplexe Zahl ersetzt wird. Analog ist v^\dagger für Vektoren $v \in \mathbb{C}^n$ definiert. Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 2 & 3 & 1+i \\ 3 & 4 & 3i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -i & 3 & 4 \\ i & 1-i & -3i \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}^\dagger = [1 \quad -i \quad 1-i].$$

Eine Matrix A heißt unitär, wenn $A^\dagger A = I$ ist, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet; eine Matrix B heißt hermitesch, wenn $B = B^\dagger$.

Seien

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Vektoren aus \mathbb{C}^n . Das innere Produkt $\langle v, w \rangle$ von v und w ist definiert als $\langle v, w \rangle := v^\dagger w = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i$. Beachte, dass $\langle cv, w \rangle$ nicht notwendigerweise gleich $c\langle v, w \rangle$ ist. Die Norm $\|v\|$ eines Vektors $v \in \mathbb{C}^n$ ist gleich $\langle v, v \rangle^{1/2}$.