Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Approximationsalgorithmen

Was kann man tun, wenn man Problem nicht effizient lösen kann?

- Die Aufgabenstellung vereinfachen!

Approximationsalgorithmen

- Löse Problem nicht exakt, sondern nur approximativ
- Qualitätsgarantie in Abhängigkeit von optimaler Lösung
- Z.B.: jede berechnete Lösung ist nur doppelt so teuer, wie eine optimale Lösung

Heuristik

- Löse ein Problem nicht exakt
- Keine Qualitätsgarantie
- Können jedoch in der Praxis durchaus effizient sein

Approximationsalgorithmen

Approximationsalgorithmen

- Löse Problem nicht exakt, sondern nur approximativ
- Qualitätsgarantie in Abhängigkeit von optimaler Lösung
- Z.B.: jede berechnete Lösung ist nur doppelt so teuer, wie eine optimale Lösung

Beispiel (kürzeste Wege)

- Wir sind zufrieden mit Wegen, die maximal doppelt so lang sind, wie ein kürzester Weg
- Gilt dies für alle berechneten Wege, so haben wir einen 2-Approximations-algorithmus

Approximationsalgorithmen

Definition (Approximationsalgorithmus)

- Ein Algorithmus A für ein Optimierungsproblem heißt $\alpha(n)$-Approximations-algorithmus, wenn für jedes n und jede Eingabe der Größe n gilt, dass

$$\max\left(\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right) \leq \alpha(n)$$

  wobei C die Kosten der von A berechneten Lösung für die gegebene Instanz bezeichnet und C* die Kosten einer optimalen Lösung

- $\alpha(n)$ heißt auch Approximationsfaktor

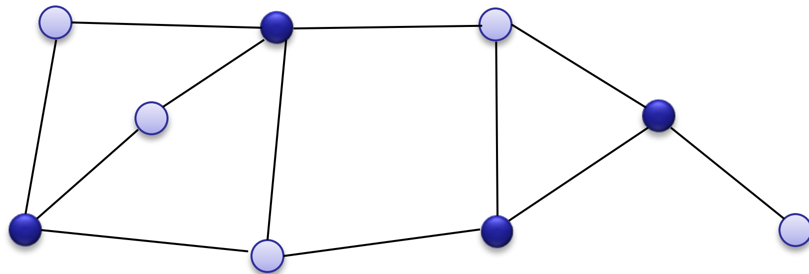
Approximationsalgorithmen

Knotenüberdeckung

- Sei G=(V,E) ein ungerichteter Graph. Eine Menge U⊆V heißt Knotenüberdeckung, wenn gilt, dass für jede Kante (u,v)∈E mindestens einer der Endknoten u,v in U enthalten ist.

Problem minimale Knotenüberdeckung

- Gegeben ein Graph G=(V,E)
- Berechnen Sie eine Knotenüberdeckung U minimaler Größe |U|



Approximationsalgorithmen

Erste Idee

- Wähle immer Knoten mit maximalem Grad und entferne alle anliegenden Kanten

GreedyVertetCover1()

1. **while** $E \neq \emptyset$ **do**
2. wähle einen Knoten v mit maximalem Knotengrad
3. Entferne alle an v anliegenden Kanten aus E

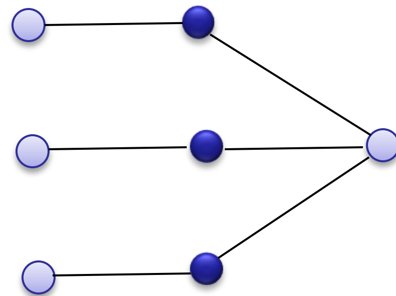
Erste Frage

- Ist der Algorithmus optimal?

Approximationsalgorithmen

Erste Frage

- Ist der Algorithmus optimal?
- Nein! Gegenbeispiel:

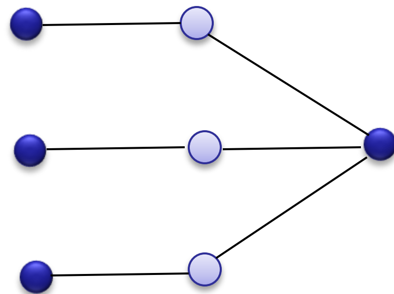


- Optimale Lösung hat Größe 3

Approximationsalgorithmen

Erste Frage

- Ist der Algorithmus optimal?
- Nein! Gegenbeispiel:



- Die von GreedyVertexCover1 berechnete Lösung hat Größe 4

Approximationsalgorithmen

Zweite Frage

- Hat der Algorithmus einen konstanten Approximationsfaktor?
- Nein!
- Wir entwickeln nun Konstruktion eines Gegenbeispiels

Definition

- Ein Graph G=(V,E) heißt bipartit (oder 2-färbbar), wenn man V in zwei Mengen L und R partitionieren kann, so dass es keine Kante gibt, deren Endknoten beide in L oder beide in R liegen.
- Man schreibt auch häufig $G=(L\cup R, E)$, um die Partition direkt zu benennen.

Approximationsalgorithmen

Beobachtung

- Sei $G=(L \cup R, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist L bzw. R eine gültige Knotenüberdeckung (die aber natürlich nicht unbedingt minimale Größe hat)

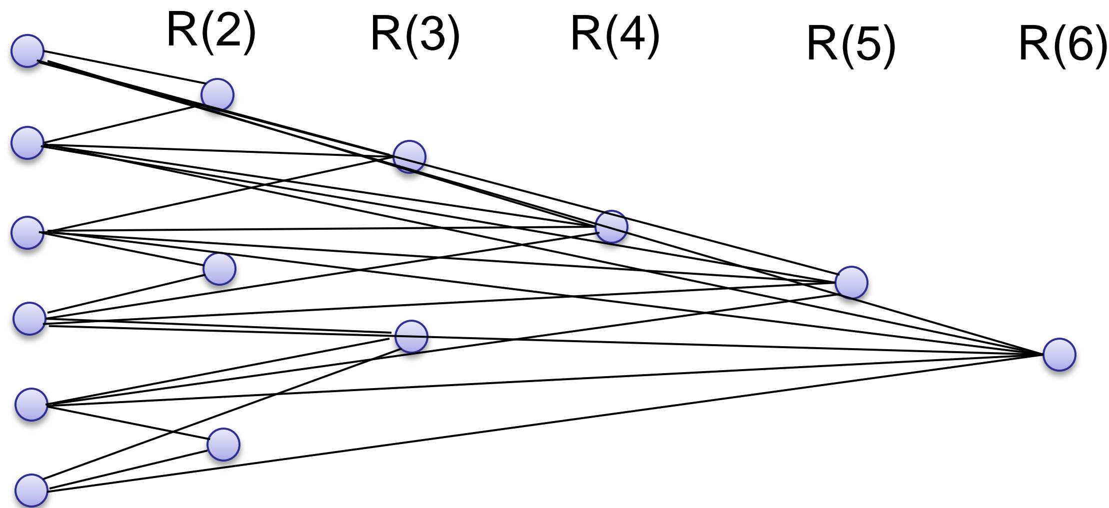
Idee

- Wir konstruieren einen bipartiten Graph, bei dem $|L| = r$ ist und $|R|=\Omega(r \log r)$. Trotzdem wählt der Algorithmus GreedyVertexCover1 die Knoten der Seite r aus
- Damit ist für $r \rightarrow \infty$ der Approximationsfaktor nicht durch eine Konstante beschränkt

Approximationsalgorithmen (siehe Vollversion)

Die Konstruktion

- Sei L={1,…,r} eine Menge mit r Knoten
- Im i-ten Schritt wählen wir Menge R(i) mit $\lfloor |L|/i \rfloor$ Knoten
- Der j-te Knoten aus R(i) wird mit Knoten i(j-1)+1,…, ij verbunden

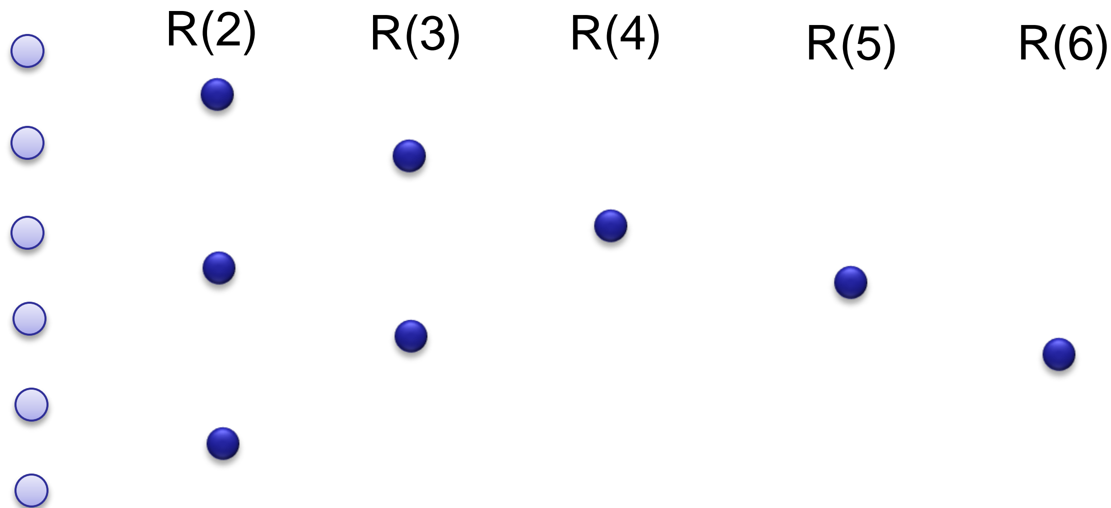


Die Menge L

Approximationsalgorithmen (siehe Vollversion)

Was macht der Algorithmus?

- Der Algorithmus wählt alle Knoten aus $R = \cup R(i)$



Approximationsalgorithmen

Was macht der Algorithmus?

- Wie groß kann R werden?

$$|R| = \sum_{i=2}^{r} \left\lfloor \frac{|L|}{i} \right\rfloor \geq \sum_{i=2}^{r} \frac{|L|}{2i} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{r} \frac{r}{i} = \frac{r}{2} \cdot \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i} \geq \frac{r}{2}(\ln r - 1) = \Omega(r \ln r)$$

- Damit ist das Approximationsverhältnis nicht konstant
- (Man kann zeigen, dass es für Graphen mit n Knoten O(log n) ist)

Approximationsalgorithmen

Können wir einen besseren Algorithmus entwickeln?

GreedyVertexCover2(G)

1. C $\leftarrow \emptyset$
2. E‘ $\leftarrow$ E(G)
3. **while** E‘$\neq\emptyset$ **do**
4. Sei (u,v) beliebige Kante aus E‘
5. C $\leftarrow$ C $\cup$ {(u,v)}
6. Entferne aus E‘ jede Kante, die an u oder v anliegt
7. **return** C

Laufzeit: O(|E|)

Approximationsalgorithmen

Satz

- ApproxVertexCover2 ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das Knotenüberdeckungsproblem.

Beweis

- Die von ApproxVertexCover2 berechnete Menge C ist eine Knotenüberdeckung, da die while-Schleife solange durchlaufen wird, bis alle Kanten überdeckt sind
- Sei A die Menge der Kanten, die in Zeile 4 ausgewählt wurden
- Die Endpunkte der Kanten aus A sind disjunkt, da nach der Auswahl einer Kante alle an den Endpunkten anliegende Kanten gelöscht werden
- Es gilt somit |C| = 2 |A|
- Jede Knotenüberdeckung (insbesondere einen optimale Überdeckung C*) muss die Kanten aus A überdecken und somit mindestens einen Endpunkt jeder Kante enthalten

Approximationsalgorithmen

Satz

- ApproxVertexCover2 ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das Knotenüberdeckungsproblem.

Beweis

- Da keine zwei Kanten aus A einen gemeinsamen Endpunkt haben, liegt kein Knoten aus der Überdeckung C* an mehr als einer Kante aus A an
- Somit gilt $|A| \le |C^*|$ und damit folgt $|C| \le 2\,|C^*|$

Approximationsalgorithmen

Travelling Salesman Problem (TSP) mit Dreiecksungleichung

- Sei G=(V,E) ein ungerichteter vollständiger Graph mit positiven Kantengewichten w(u,v) für alle $(u,v)\in E$; o.b.d.A. V={1,…n}
- Gesucht ist eine Reihenfolge $\pi(1),\ldots,\pi(n)$ der Knoten aus V, so dass die Länge der Rundreise $\pi(1),\ldots,\pi(n)$, $\pi(1)$ minimiert wird
- Die Länge der Rundreise ist dabei gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{n} w(\pi(i), \pi(i+1 \bmod n))$$

- Für je drei Knoten u,v,x gilt $w(u,x) \le w(u,v) + w(v,x)$

Dreiecksungleichung

Approximationsalgorithmen

ApproxTSP(G,w)

1. Berechne minimalen Spannbaum T von G
2. Sei π die Liste der Knoten von G in der Reihenfolge eines Preorder-Tree-Walk von einem beliebigen Knoten v
3. **return** L

Preorder-Tree-Walk

- Besucht rekursiv alle Knoten von T und gibt jeden Knoten sofort aus, wenn er besucht wird
- Dann erst finden die rekursiven Aufrufe für die Kinder statt

Approximationsalgorithmen

ApproxTSP(G,w)

1. Berechne minimalen Spannbaum T von G
2. Sei π die Liste der Knoten von G in der Reihenfolge eines Preorder-Tree-Walk von einem beliebigen Knoten v
3. **return** L

Laufzeit

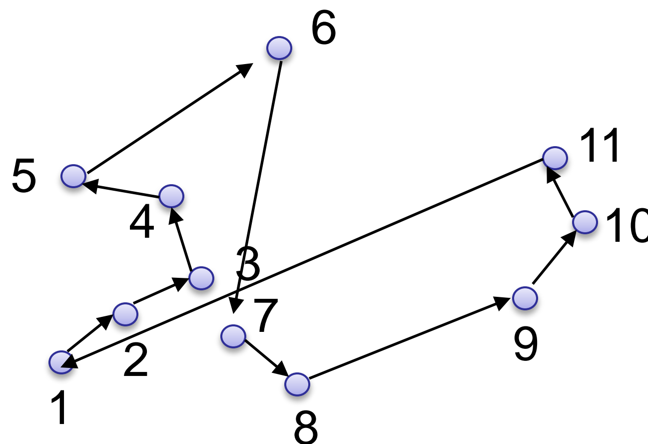
- O(|E| log |E|) für die Spannbaumberechnung

Approximationsalgorithmen (siehe Vollversion)

Beispiel (euklidische Entfernung)

Approximationsalgorithmen (siehe Vollversion)

Beispiel (euklidische Entfernung)



Approximationsalgorithmen

Satz

- Algorithmus ApproxTSP ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das Travelling Salesman Problem mit Dreiecksungleichung.

Beweis

- Sei H^* eine optimale Rundreise und bezeichne $w(H^*)$ ihre Kosten
- Z.z.: $w(H) \leq 2 \cdot w(H^*)$, wobei H die von ApproxTSP zurückgegebene Rundreise ist und $w(H)$ ihre Kosten bezeichnet
- Sei T ein min. Spannbaum und $w(T)$ seine Kosten
- Es gilt $w(T) \leq w(H^*)$, da man durch Löschen einer Kante aus H^* einen Spannbaum bekommen kann. Dieser hat Gewicht mind. $w(T)$

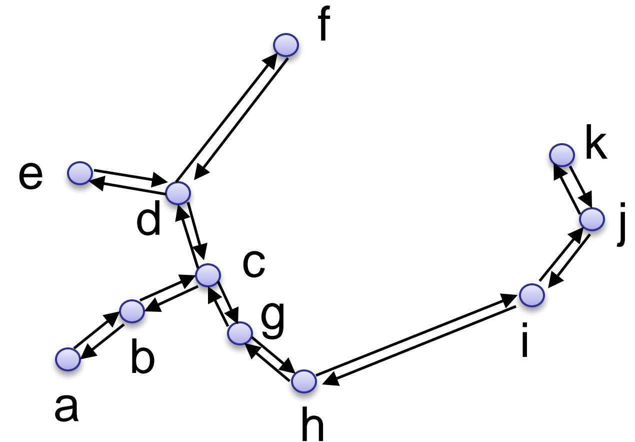
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Ein FullWalk gibt die Knoten bei jedem ersten Besuch aus und auch immer, wenn der Algorithmus zu ihnen zurückkehrt

In unserem Beispiel:

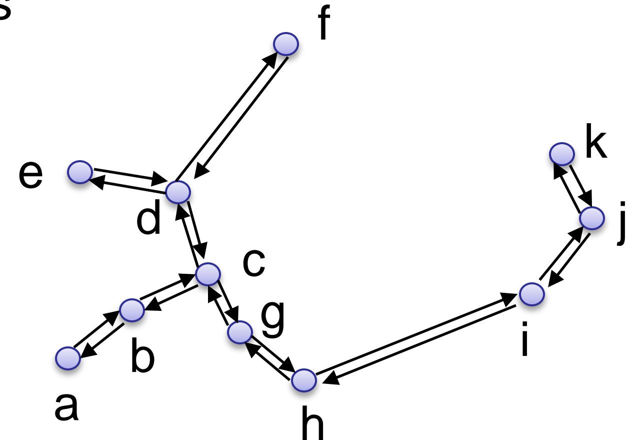
- a, b, c, d, e, d, f, d, c, g, h, i, j, k, j, i, h, g, c, b, a



Approximationsalgorithmen

Beweis

- Ein FullWalk gibt die Knoten bei jedem ersten Besuch aus und auch immer, wenn der Algorithmus zu ihnen zurückkehrt
- Da der FullWalk F jede Kante von T genau zweimal durchquert, gilt w(F)=2w(T), wobei w(F) die Kosten des FullWalks bezeichnet
- Also folgt w(F) ≤ 2 w(H*)
- F ist jedoch keine Rundreise (und nicht die von ApproxTSP berechnete Ausgabe)
- Wir formen nun F in diese Ausgabe um, ohne die Kosten zu erhöhen
- Beobachtung: Aufgrund der Dreiecksungleichung können wir den Besuch eines Knotens aus F löschen, ohne die Kosten der Rundreise zu erhöhen (wird v zwischen u und x gelöscht, so werden die Kanten (u,v) und (v,x) durch (u,x) ersetzt)



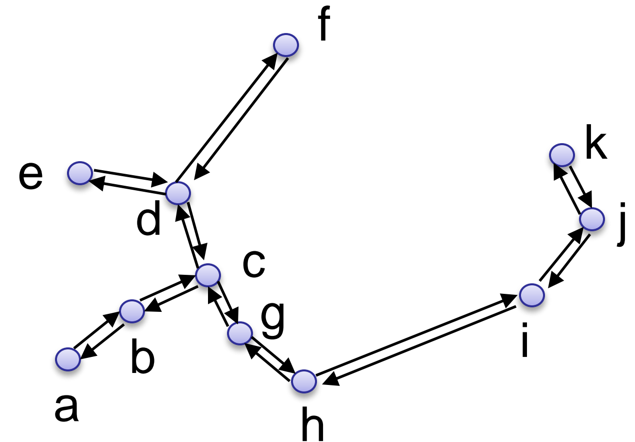
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, d, f, d, c, g, h, i, j, k, j, i, h, g, c, b, a



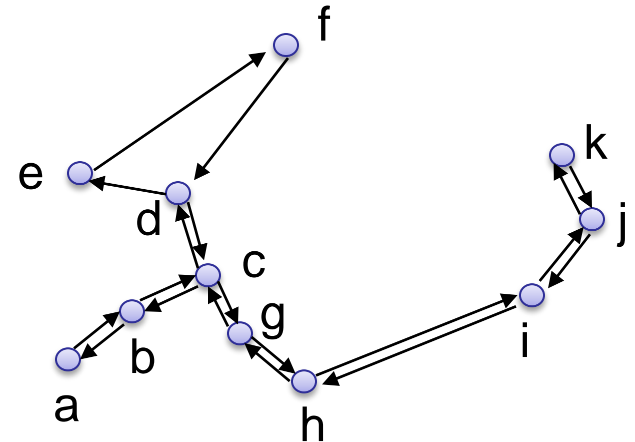
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, d, c, g, h, i, j, k, j, i, h, g, c, b, a



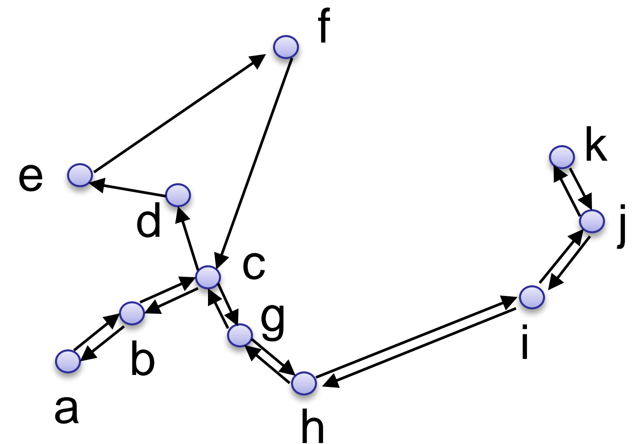
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, c, g, h, i, j, k, j, i, h, g, c, b, a



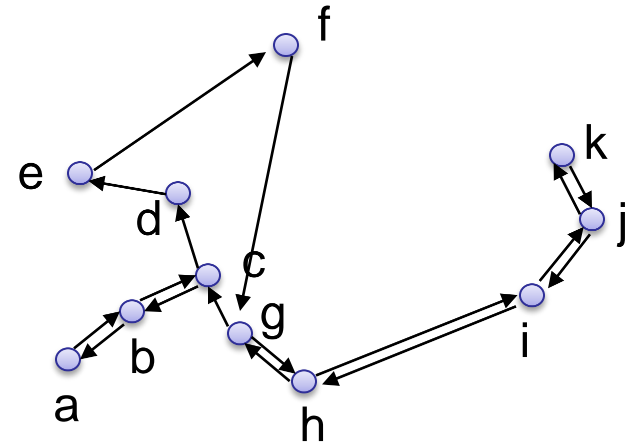
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, j, i, h, g, c, b, a



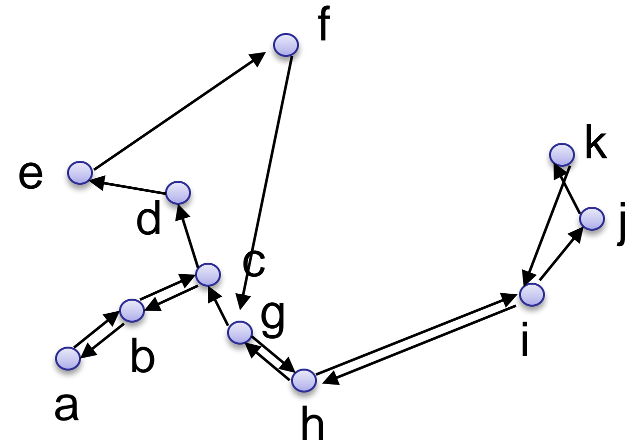
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, i, h, g, c, b, a



Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, h, g, c, b, a

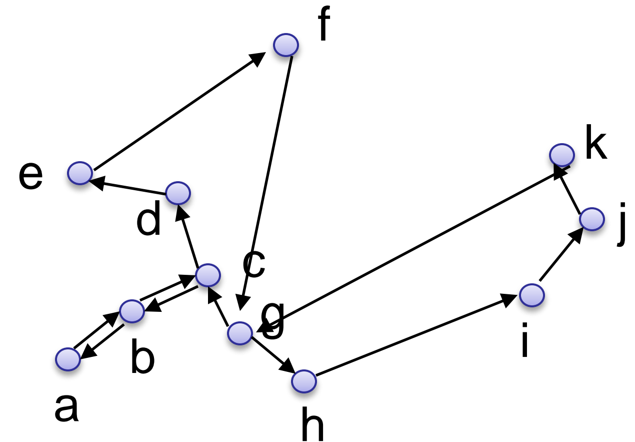
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, g, c, b, a



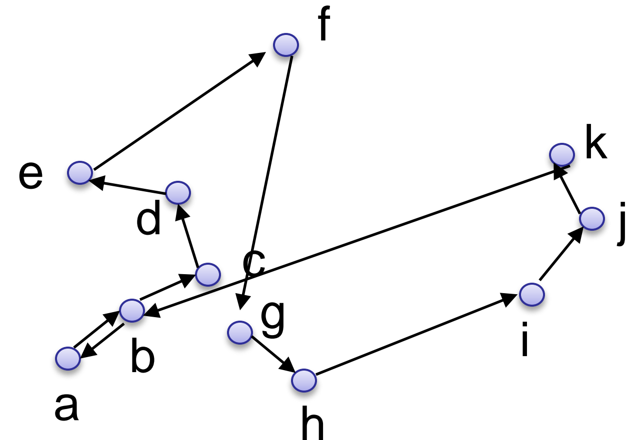
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

- a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, b, a



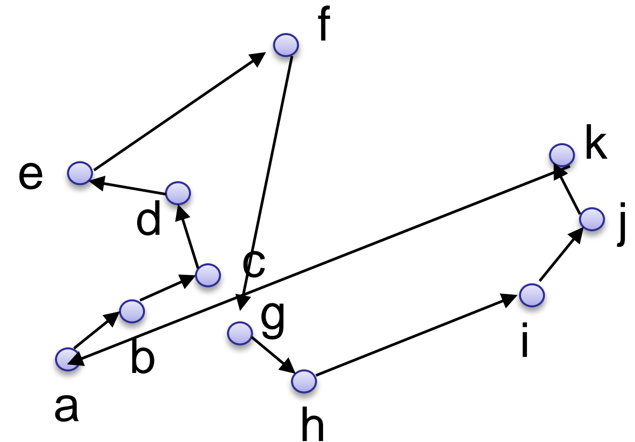
Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen

In unserem Beispiel:

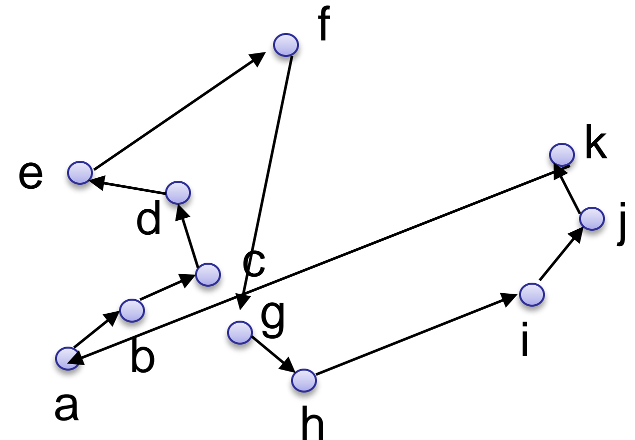
- a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, a



Approximationsalgorithmen

Beweis

- Auf diese Weise können wir alle Besuche außer dem ersten aus unserer Liste entfernen
- Wir erhalten dieselbe Rundreise wie bei Preorder-Tree-Walk
- Da diese nur durch „abkürzen“ von F zu Stande gekommen ist, gilt $w(H) \leq w(F)$
- Somit folgt $w(H) \leq w(F) \leq 2\, w(H^*)$



Approximationsalgorithmen

Last Balanzierung

- m identische Maschinen {1,..,m}
- n Aufgabe {1,…,n}
- Job j hat Länge t(j)
- Aufgabe: Platziere die Aufgabe auf den Maschinen, so dass diese möglichst „balanziert“ sind

- Sei A(i) die Menge der Aufgaben auf Maschine i
- Sei $T(i) = \sum_{j \in A(i)} t(j)$
- Makespan: max T(i)
- Präzise Aufgabe: Minimiere Makespan

Approximationsalgorithmen

GreedyLoadBalancing

1. Setze $T(i)=0$ und $A(i)=\emptyset$ für alle Maschinen $i \in \{1,..,m\}$
2. **for** $j=1$ **to** n **do**
3. Sei $M(i)$ eine Maschine mit $T(i) = \min_{k \in \{1,..,m\}} T(k)$
4. Weise Aufgabe j Maschine i zu
5. $A(i) \leftarrow A(i) \cup \{j\}$
6. $T(i) \leftarrow T(i) + t(j)$

Approximationsalgorithmen

Satz

- Algorithmus GreedyLoadBalancing hat ein Approximationsverhältnis von mindestens 2-1/m.

Beweis

- Eingabe: m (m-1) Aufgaben der Länge 1 und eine Aufgabe der Länge m
- Optimale Lösung:
- Die Aufgabe der Länge m wird einer Maschine zugeteilt
- Die anderen Aufgaben werden gleichmäßig auf die übrigen m-1 Maschinen verteilt; resultierender Makespan: m

Maschine 1:

Maschine 2:

Maschine 3:

Approximationsalgorithmen

Satz

- Algorithmus GreedyLoadBalancing hat ein Approximationsverhältnis von mindestens 2-1/m.

Beweis

- GreedyLoadBalancing verteilt zunächst die kurzen Aufgaben gleichmäßig
- Danach wird die lange Aufgabe zugewiesen
- Makespan: 2m-1

Maschine 1:

Maschine 2:

Maschine 3:

Approximationsalgorithmen

Satz

- Algorithmus GreedyLoadBalancing hat ein Approximationsverhältnis von mindestens 2-1/m.

Beweis

- Damit ist das Approximationsverhältnis mindestens (2m-1)/m = 2-1/m.

Approximationsalgorithmen

Beobachtung

- Für jede Probleminstanz ist der optimale Makespan mindestens

$$T^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} t(j)$$

- Begründung: Bestenfalls können wir die Aufgaben genau auf die m Maschinen aufteilen und jede Maschine hat Last Gesamtlast/Anzahl Maschinen

Approximationsalgorithmen

Satz

- Algorithmus GreedyLoadBalancing ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das Lastbalanzierungsproblem.

Beweis

- Sei i* die Maschine, die maximale Last in der vom Algorithmus berechneten Zuteilung erhält
- Sei j* die Aufgabe, die Maschine i* als letzte zugewiesen wurde
- Es gilt: T(k)≥T(i*)-t(j*) für alle Maschinen k, da zum Zeitpunkt der Zuweisung von j*, T(i*) Minimum der T(k) war
- Somit folgt für die Kosten Opt einer optimalen Zuweisung:

$$Opt \geq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} T(k) \geq T(i^*) - t(j^*)$$

Approximationsalgorithmen

Satz

- Algorithmus GreedyLoadBalancing ist ein 2-Approximationsalgorithmus für das Lastbalanzierungsproblem.

Beweis

- Außerdem gilt sicher Opt ≥t(j*)
- Es folgt

$$T(i^*) = (T(i^*) - t(j^*)) + t(j^*) \leq 2Opt$$

Approximationsalgorithmen

Zusammenfassung & Kommentare

- Man kann viele Probleme approximativ schneller lösen als exakt (für die drei Beispiele sind keine Algorithmen mit Laufzeit $O(n^c)$ für eine Konstante c bekannt)
- Gierige Algorithmen sind häufig Approximationsalgorithmen