



Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

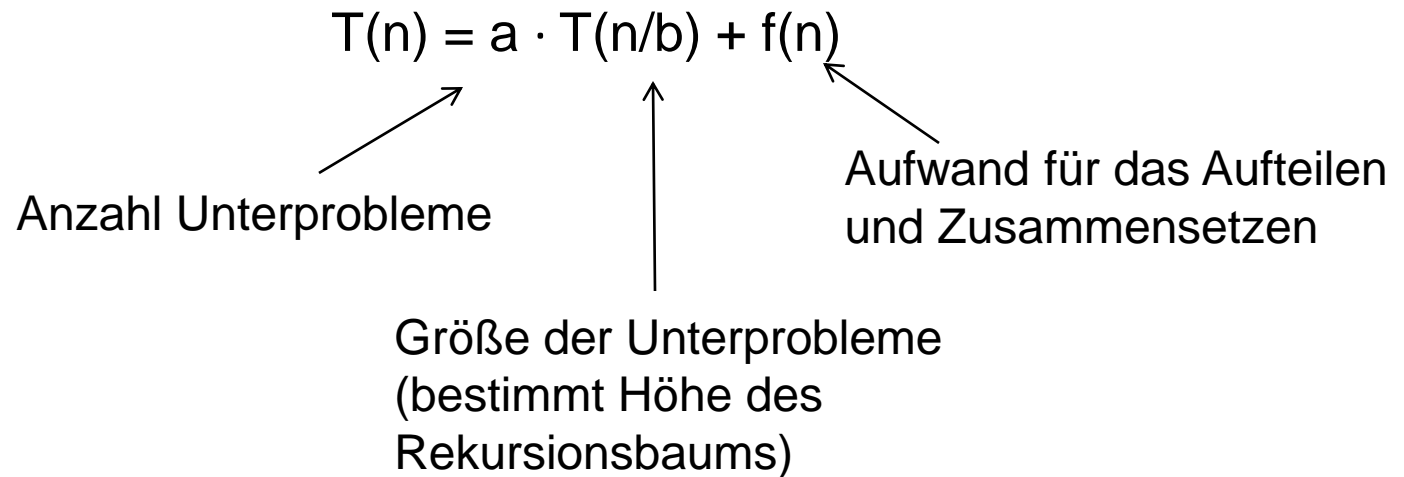
Teile & Herrsche

Teile & Herrsche (Divide & Conquer)

- Teile Eingabe in mehrere Teile auf
- Löse das Problem rekursiv auf den Teilen
- Füge die Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen

Teile & Herrsche

Laufzeiten der Form

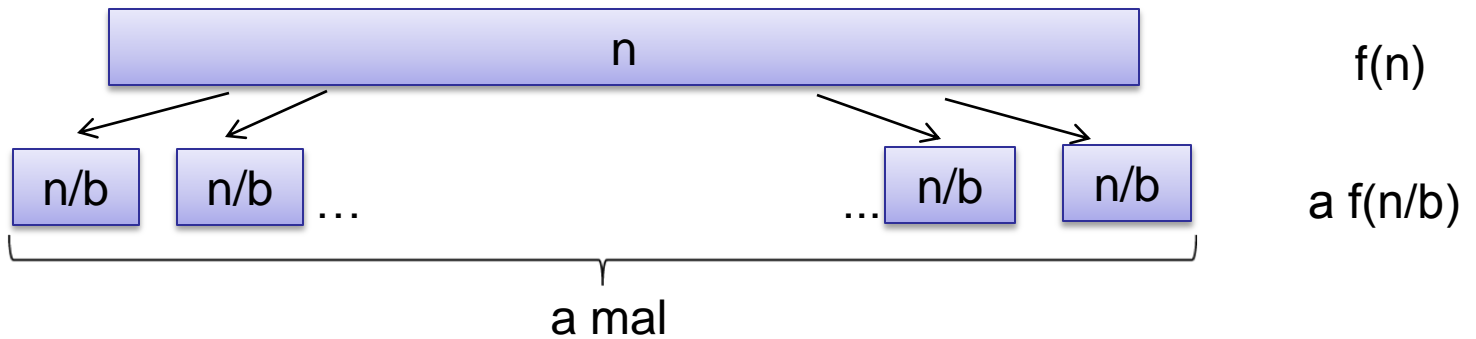


- wobei $T(1)$ konstant ist

Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

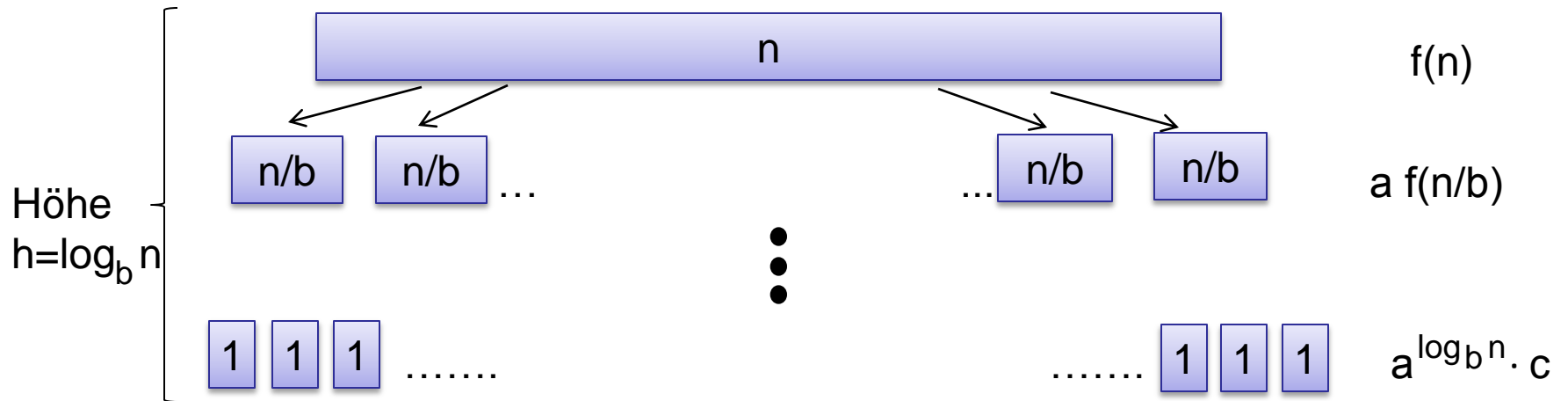
$$T(n) = \begin{cases} a T(n/b) + f(n) & , n > 1 \\ c & , n = 1 \end{cases}$$



Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

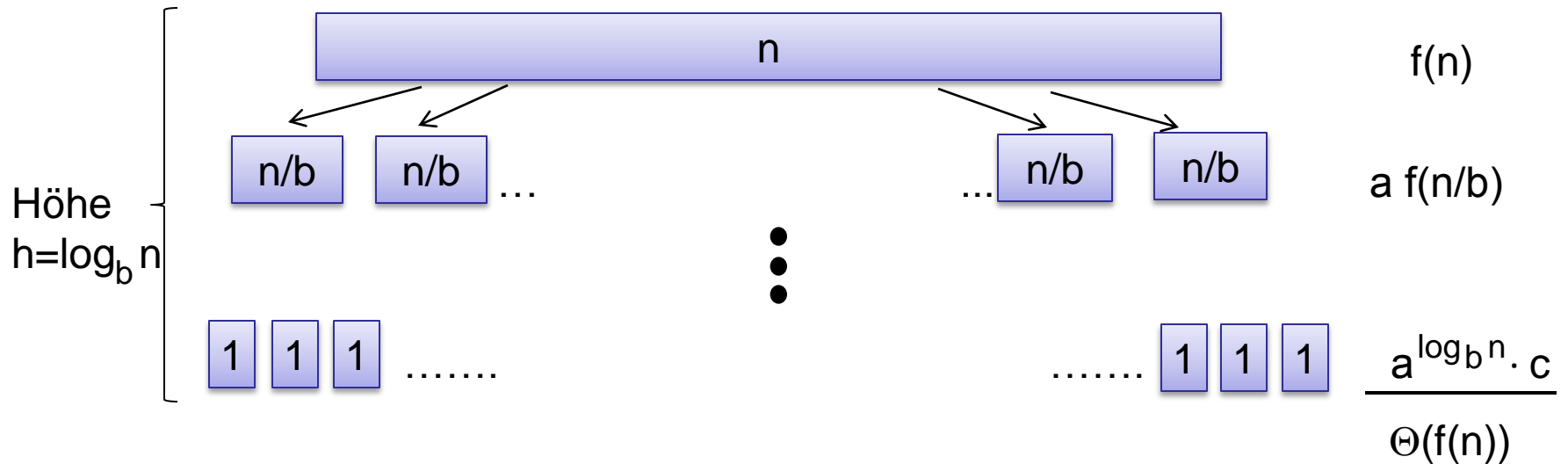


Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

Fall 1:
 $\alpha < 1$



Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

$$\text{Laufzeit: } T(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n - 1} a^k \cdot f\left(\frac{n}{b^k}\right)}_{\text{Laufzeit für } n > 1} + \underbrace{a^k \cdot c}_{\text{Laufzeit Blätter}}$$

Fall 1:
 $\alpha < 1$

Da $f(1)$ und c beides Konstanten sind, können wir annehmen, dass $f(1)=c=1$ ist. Also gilt:

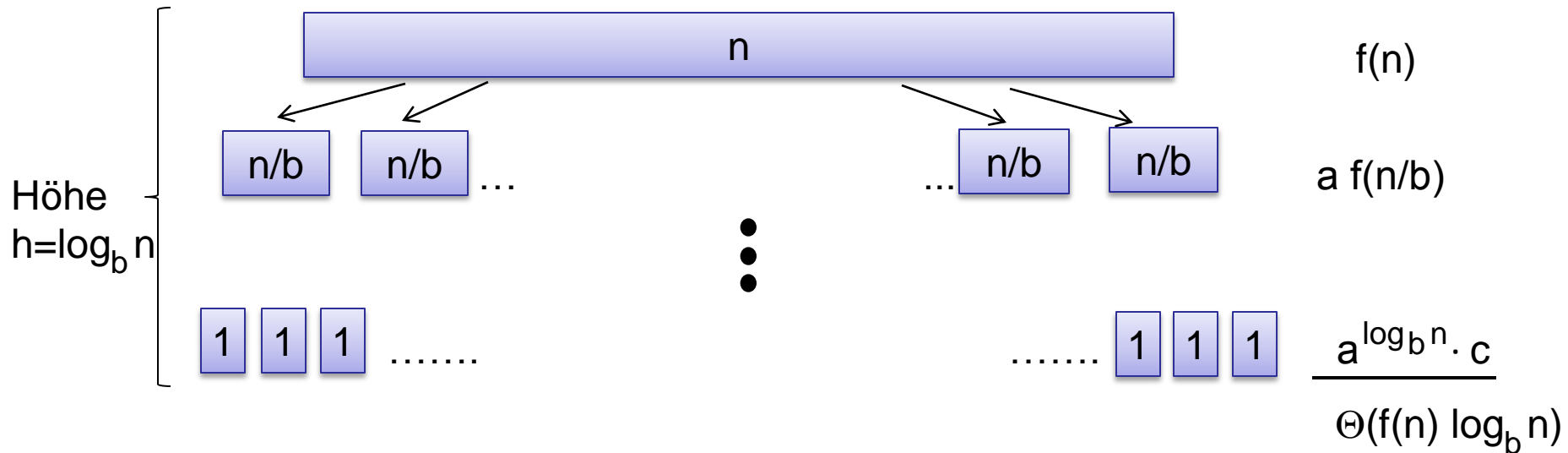
$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=0}^{\log_b n} a^k \cdot f\left(\frac{n}{b^k}\right) \\ &= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 \cdot f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \dots + a^l \\ &= f(n) + \alpha \cdot f(n) + \alpha \cdot a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + \dots + \alpha \cdot a^{k-1} \cdot f(b) \\ &= \sum_{k=0}^{\log_b n} \alpha^k \cdot f(n) \\ &= f(n) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n} \alpha^k}_{\text{const, falls } \alpha < 1} = \Theta(f(n)) \end{aligned}$$

Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

Fall 2:
 $\alpha=1$



Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

$$\text{Laufzeit: } T(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n - 1} a^k \cdot f\left(\frac{n}{b^k}\right)}_{\text{Laufzeit für } n > 1} + \underbrace{a^k \cdot c}_{\text{Laufzeit Blätter}}$$

Fall 2:
 $\alpha = 1$

Da $f(1)$ und c beides Konstanten sind, können wir annehmen, dass $f(1) = c = 1$ ist. Also gilt:

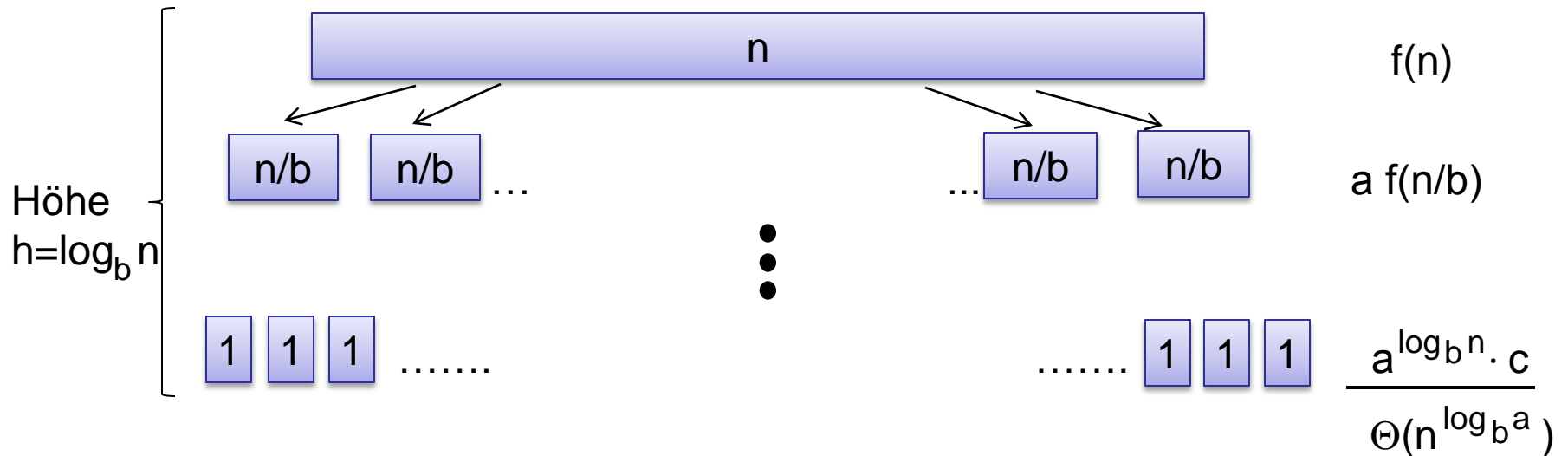
$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=0}^{\log_b n} a^k \cdot f\left(\frac{n}{b^k}\right) \\ &= f(n) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 \cdot f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \dots + a^l \\ &= f(n) + \alpha \cdot f(n) + \alpha \cdot a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + \dots + \alpha \cdot a^{k-1} \cdot f(b) \\ &= \sum_{k=0}^{\log_b n} \alpha^k \cdot f(n) \\ &= f(n) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n} \alpha^k}_{(\log_b n + 1) \text{ für } \alpha = 1} = \Theta(f(n) \cdot \log_b n) \end{aligned}$$

Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

Fall 3:
 $\alpha > 1$



Teile & Herrsche

Laufzeit der Form

- Setze $\alpha \cdot f(n) = a \cdot f(n/b)$

$$\text{Laufzeit: } T(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n - 1} a^k \cdot f\left(\frac{n}{b^k}\right)}_{\text{Laufzeit für } n > 1} + \underbrace{a^k \cdot c}_{\text{Laufzeit Blätter}}$$

Fall 3:
 $\alpha > 1$

Da $f(1)$ und c beides Konstanten sind, können wir annehmen, dass $f(1)=c=1$ ist. Also gilt:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=0}^{\log_b n} a^k \cdot f\left(\frac{n}{b^k}\right) \\ &= a^{\log_b n} + a^{\log_b n - 1} \cdot f(b) + \dots + a^2 \cdot f\left(\frac{n}{b^2}\right) + a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \\ &= a^k + \frac{a^k}{\alpha} + \dots + \frac{a^3}{\alpha} \cdot f\left(\frac{n}{b^3}\right) + \frac{a^2}{\alpha} \cdot f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \frac{a}{\alpha} \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \text{ da } f(n) = + \frac{a}{\alpha} \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \text{ gilt und } f(1) = 1. \\ &= \sum_{k=0}^{\log_b n} \alpha^k \cdot \frac{1}{\alpha^k} \\ &= a^{\log_b n} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\log_b n} \frac{1}{\alpha^k}}_{\text{const}} = \Theta(a^{\log_b n}) \end{aligned}$$

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation (siehe Vollversion für ausführliches Beispiel)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Zeile x Spalte

- $5 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 11$

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation (siehe Vollversion für ausführliches Beispiel)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Zeile x Spalte

- $5 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 10$

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation (siehe Vollversion für ausführliches Beispiel)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 17 & 15 \\ 10 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 17 & 15 \\ 10 & 5 & 7 & 3 \\ 31 & 10 & 24 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation

- Problem: Berechne das Produkt zweier $n \times n$ -Matrizen
- Eingabe: Matrizen X, Y
- Ausgabe: Matrix $Z = X \cdot Y$

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,4} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & y_{2,4} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & y_{3,4} \\ y_{4,1} & y_{4,2} & y_{4,3} & y_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} \\ z_{2,1} & z_{2,2} & z_{2,3} & z_{2,4} \\ z_{3,1} & z_{3,2} & z_{3,3} & z_{3,4} \\ z_{4,1} & z_{4,2} & z_{4,3} & z_{4,4} \end{pmatrix}$$

Teile & Herrsche

▪ MatrixMultiplikation (Array X,Y,n)

1. **new array** Z[1..n][1..n]
2. **for** i ← 1 **to** n **do**
3. **for** j ← 1 **to** n **do**
4. Z[i][j] ← 0
5. **for** k ← 1 **to** n **do**
6. Z[i][j] ← Z[i][j] + X[i][k] · Y[k][j]
7. **return** Z

Laufzeit

$\Theta(n^2)$

$\Theta(n)$

$\Theta(n^2)$

$\Theta(n^2)$

$\Theta(n^3)$

$\Theta(n^3)$

$\Theta(1)$

$\Theta(n^3)$

Ausnahme (Rechenmodell):
Dynamische Initialisierung
eines Feldes benötigt Zeit
proportional zur Größe des
Feldes

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

wobei A, B, C, \dots, H und $AE + BG, \dots, CF + DH$ jeweils $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen sind.

Für eine Matrix M bezeichne M_{ij} den Eintrag in Zeile i und Spalte j .

Ferner bezeichne M_{i*} die i -te Zeile von M und M_{*j} die j -te Spalte.

Wenn wir $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ schreiben, sowie $Z = X \cdot Y$, so müssen

wir zeigen, dass ein beliebiger Eintrag in Z dem entsprechenden Eintrag in der Matrix oben entspricht. Wir zeigen dies für Eintrag Z_{ij} mit $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2}$.

Die anderen Einträge folgen analog.

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

wobei A, B, C, \dots, H und $AE+BG, \dots, CF+DH$ jeweils $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen sind.

Für eine Matrix M bezeichne M_{ij} den Eintrag in Zeile i und Spalte j .

Ferner bezeichne M_{i*} die i -te Zeile von M und M_{*j} die j -te Spalte.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } Z_{ij} &= X_{i*} \cdot Y_{*j} \\ &= A_{i*} \cdot E_{*j} + B_{i*} \cdot G_{*j} \\ &= (AE)_{ij} + (BG)_{ij} \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Eintrag in unserer Zielmatrix

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Aufwand

- 8 Multiplikationen von $n/2 \times n/2$ Matrizen
- 4 Additionen von $n/2 \times n/2$ Matrizen

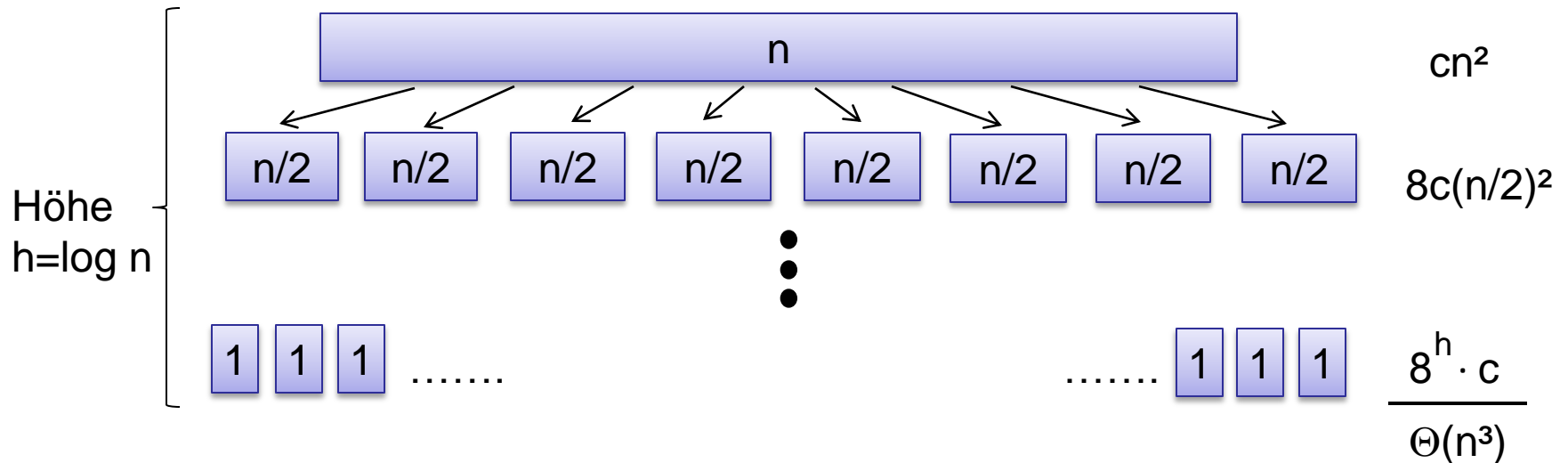
- *Laufzeit*

$$T(n) = \begin{cases} 8 T(n/2) + cn^2 & , \text{ für } n > 1 \\ c & , \text{ für } n = 1 \end{cases}$$

Teile & Herrsche

Laufzeit einfache Matrixmultiplikation

$$T(n) = \begin{cases} 8 T(n/2) + cn^2 & , n > 1 \\ c & , n = 1 \end{cases} \quad c \text{ geeignete Konstante}$$



Teile & Herrsche

Satz 14

- Die einfache Matrizenmultiplikation hat Laufzeit $\Theta(n^3)$.

Beweis

- Wir nehmen an, dass n eine Zweierpotenz ist und $T(2) \leq c$ gilt. Wir zeigen zunächst per Induktion über n , dass $T(n) \leq cn^3 - cn^2$.
- (I.A.) Für $n=2$ ist $T(2) \leq c \leq c \cdot 2^3 - c \cdot 2^2$
- (I.V.) Für $m < n$ ist $T(m) \leq cm^3 - cm^2$.
- (I.S.) Es gilt $T(n) = 8 T(n/2) + cn^2$. Nach (I.V.) folgt $T(n) \leq 8 c(n/2)^3 - 8 c(n/2)^2 + cn^2 \leq cn^3 - cn^2$.

Teile & Herrsche

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Trick (wie bei Integer Multiplikation)

- $P_1 = A \cdot (F-H)$
- $P_2 = (A+B) \cdot H$
- $P_3 = (C+D) \cdot E$
- $P_4 = D \cdot (G-E)$
- $P_5 = (A+D) \cdot (E+H)$
- $P_6 = (B-D) \cdot (G+H)$
- $P_7 = (A-C) \cdot (E+F)$

$$AE+BG = P_4 + P_5 + P_6 - P_2$$

$$AF+BH = P_1 + P_2$$

$$CE+DG = P_3 + P_4$$

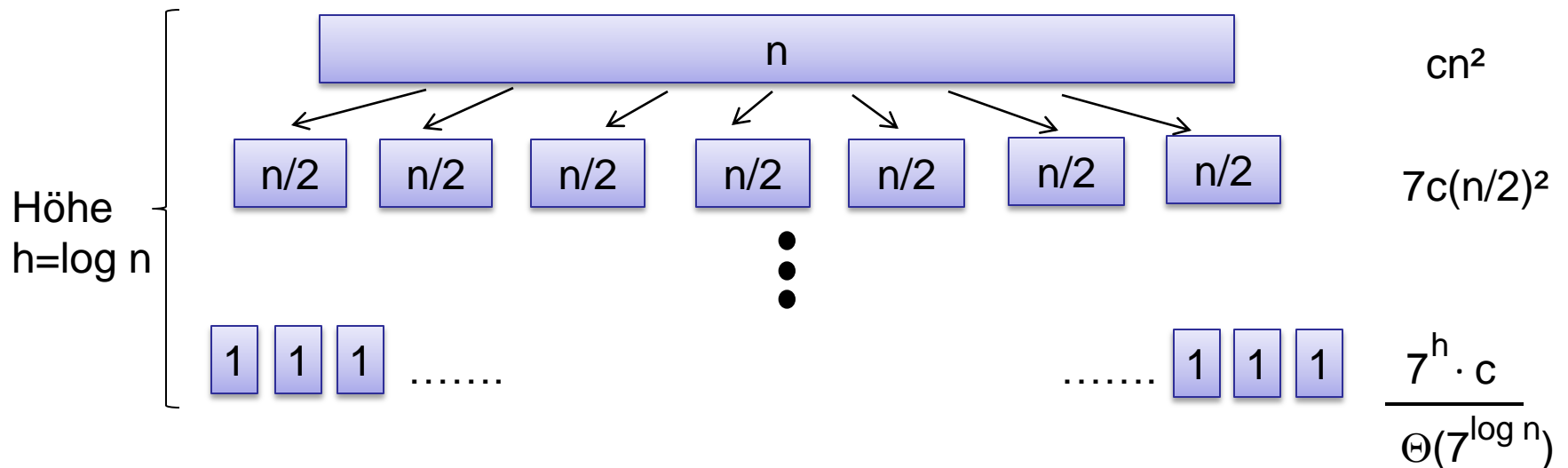
$$CF+DH = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$$

Nur 7 Multiplikationen !!!!!

Teile & Herrsche

Laufzeit einfache Matrixmultiplikation

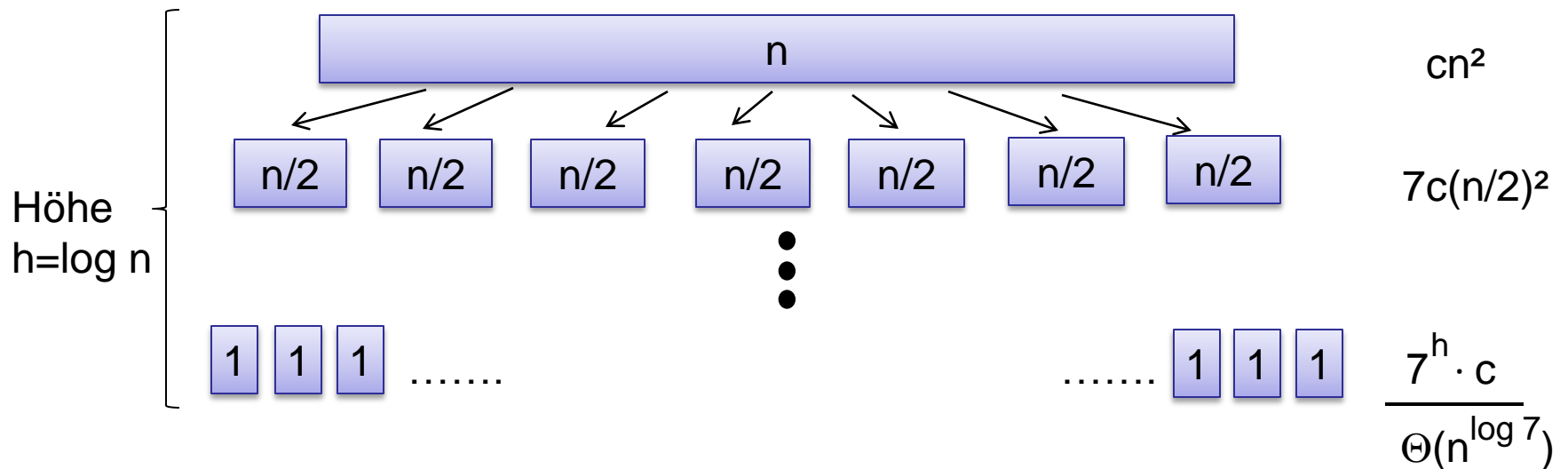
$$T(n) = \begin{cases} 7 T(n/2) + cn^2 & , n > 1 \\ c & , n = 1 \end{cases} \quad c \text{ geeignete Konstante}$$



Teile & Herrsche

Laufzeit einfache Matrixmultiplikation

$$T(n) = \begin{cases} 7 T(n/2) + cn^2 & , n > 1 \\ c & , n = 1 \end{cases} \quad c \text{ geeignete Konstante}$$



Teile & Herrsche

Satz 14

- Die einfache Matrizenmultiplikation hat Laufzeit $\Theta(7^{\log n})$.

Beweis

- Wir nehmen an, dass n eine Zweierpotenz ist und $T(4) \leq c$ gilt. Wir zeigen zunächst per Induktion über n , dass $T(n) \leq c \cdot 7^{\log n} - 2cn^2$.
- (I.A.) Für $n=2$ ist $T(4) \leq c \leq c \cdot 49 - c \cdot 32$.
- (I.V.) Für $m < n$ ist $T(m) \leq c \cdot 7^{\log m} - cm^2$.
- (I.S.) Es gilt $T(n) = 7 T(n/2) + cn^2$. Nach (I.V.) folgt $T(n) \leq 7 \cdot 7^{\log(n/2)} - 14c(n/2)^2 + cn^2 \leq 7^{\log n} - 2cn^2$.

Teile & Herrsche

Satz 15

- Zwei $n/2 \times n/2$ -Matrizen können mit Hilfe des Teile & Herrsche Verfahrens in $O(n^{2.81})$ worst case Laufzeit multipliziert werden.

Beweis

- Die Laufzeit folgt aus Satz 14 wegen $2.81 \geq \log 7$. Korrektheit zeigen wir per Induktion über n .
- (I.A.) Die Multiplikation zweier 1×1 Matrizen ist korrekt.
- (I.V.) Die Multiplikation zweier $m \times m$ Matrizen für $m < n$ ist korrekt.
- (I.S.) Nach (I.V.) werden die Zwischenergebnisse P_1 bis P_7 korrekt berechnet. Damit folgt die Korrektheit des Algorithmus durch Nachrechnen der Teilformeln.

Teile & Herrsche

Zusammenfassung

- Multiplikation und Matrizenmultiplikation sind weitere Beispiel für Teile & Herrsche Algorithmen
- Faustregel: Je weniger rekursive Aufrufe desto schneller
- Trick bei Laufzeitbeweisen: Abziehen von Termen niedriger Ordnung