Vorlesung

# Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2008

Ingo Wegener

# Lineare Optimierung

## Was bisher geschah...

**LP** Minimiere $Z(x) = c^T x$
unter $Ax \leq b$
mit $x \in \mathbb{R}_0^+$

## Einsichten

- Extrempunkte der Menge zulässiger Lösungen $M$ sind Schnittpunkte von $n$ der $n + m$ durch Nebenbedingungen definierten Hyperebenen
- wenn $Z$ auf $M$ Minimum annimmt, dann auch in einem Extrempunkt von $M$
- wenn ein Extrempunkt lokal optimal ist, dann auch global optimal

# Die Simplex-Methode

1. Finde zulässigen Extrempunkt $x$ oder entscheide, dass $M = \emptyset$.
   Wenn ja, STOP.
2. Falls $x$ lokal optimal, $x$ auch global optimal. STOP.
3. Tausche eine der $n$ Hyperebenen so,
   dass ein neuer, zulässiger Extrempunkt $x$
   mit kleinerem $Z$-Wert gefunden wird.
   Teste dabei, ob $Z \to -\infty$. Wenn ja, STOP.
4. Weiter bei 2.

Simplex-Methode (Dantzig, 1947)

# Wir schreiben das Jahr 2007...

Viele Menschen besitzen Computer,
darum führt man Algorithmen nicht mehr selber aus.

**Ziel** Rechnergemäßer Ausbau der Simplex-Methode zum Simplex-Algorithmus

# Das Simplex-Tableau

## Die Optimierungsaufgabe

$$
\begin{aligned}
Z &\to \min \\
c^T x + \delta &= Z \\
Ax - b &= -u \\
x \geq 0&, u \geq 0
\end{aligned}
$$

### Definition 14.34 (Zugehöriges Simplex-Tableau)

$$
\begin{array}{|cccc|c|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & & \\
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & -b_1 & -u_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & -b_2 & -u_2 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & -b_m & -u_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & \delta & Z \\
\hline
\end{array}
$$

# Über Simplex-Tableaus

## Definition 14.24

Zwei Simplex-Tableaus heißen äquivalent, wenn die zugehörigen Gleichungssysteme gleiche Lösungsmengen haben.

## Theorem 14.25

Sind im Simplex-Tableau alle $b$-Werte $\geq 0$, ist der Basispunkt zulässig.
Sind zusätzlich alle $c$-Werte $\geq 0$, ist der Basispunkt optimal.

## Beweis.

$x = 0$, $u = b$ ist offenbar zulässig.
Da $c \geq 0$, ist $x = 0$ optimal. $\square$

# Basispunkte und Hyperebenen

**Theorem 14.26**

Ist Simplex-Tableau zur Basis $x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ äquivalent zu einem linearen Optimierungsproblem gehörigen Simplex-Tableau, so sind die Hyperebenen $u_1 = 0, \ldots, u_k = 0, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ linear unabhängig.
Der Schnittpunkt der Hyperebenen ist, falls zulässig, Extrempunkt der zulässigen Menge.

Beweis. Schreibe Hyperebenen als Gleichungen in ursprünglichen $x$-Variablen

$u_i = 0 \rightsquigarrow a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$

$x_{k+j} = 0$ bleibt so

# Beweis von Theorem 14.26 (Fortsetzung)

Betrachte Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

klar Hyperebenen linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $A$ invertierbar

betrachte $A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$

klar $A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $A^{(k)}$ invertierbar

# Beweis von Theorem 14.26 (Fortsetzung (2))

Betrachte Koeffizientenmatrix $A'$ zum Tableau zur Basis

$x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$.

Mit $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ haben wir

$-x^{(k)} = A'^{(k)} u^{(k)} - b'^{(k)}$

aus dem Originaltableau $-u^{(k)} = A^{(k)} x^{(k)} - b^{(k)}$

Einsetzen liefert

$-x^{(k)} = A'^{(k)} \left(-A^{(k)} x^{(k)} + b^{(k)}\right) - b'(k)$

also $x^{(k)} = A'^{(k)} A^{(k)} x^{(k)} - A'^{(k)} b^{(k)} + b'^{(k)}$

Gilt insbesondere für $x^{(k)} = 0^{(k)}$,

also $-A'^{(k)} b^{(k)} + b'^{(k)} = 0^{(k)}$

also $x^{(k)} = A'^{(k)} A^{(k)} x^{(k)}$ für alle $x^{(k)}$

also $A'^{(k)} = \left(A^{(k)}\right)^{-1}$ und $A^{(k)}$ invertierbar $\square$

# Basiswechsel am Simplex-Tableau

$$Z \to \min$$
$$\begin{aligned} c^T x + \delta &= Z \\ Ax - b &= -u \end{aligned}$$
$$x \geq 0, u \geq 0$$

Voraussetzung für Basiswechsel

Pivotelement $a_{i,k} \neq 0$

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
r_1 & r_2 & \cdots & r_k & \cdots & r_n & & \\
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & -b_1 & -s_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} & \cdots & a_{2,n} & -b_2 & -s_2 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} & -b_i & -s_i \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & -b_m & -s_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_k & \cdots & c_n & \delta & Z \\
\hline
\end{array}$$

## Definition 14.27

Beim Basiswechsel $r_k \leftrightarrow s_i$ heißt $a_{i,k}$ Pivotelement.

# Basiswechsel am Simplex-Tableau (2)

$$
\begin{array}{|cccccc|c|c}
r_1 & r_2 & \cdots & r_k & \cdots & r_n & & \\
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & -b_1 & -s_1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} & -b_i & -s_i \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & -b_m & -s_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_k & \cdots & c_n & \delta & Z \\
\hline
\end{array}
$$

**Basiswechsel $r_k \leftrightarrow s_i$**

$i$-te Zeile:

$$-r_k = \frac{a_{i,1}}{a_{i,k}} r_1 + \cdots + \frac{a_{i,k-1}}{a_{i,k}} r_{k-1} + \frac{1}{a_{i,k}} s_i + \frac{a_{i,k+1}}{a_{i,k}} r_{k+1} + \cdots + \frac{a_{i,n}}{a_{i,k}} r_n - \frac{b_i}{a_{i,k}}$$

$j$-te Zeile ($j \neq i$):

$$a_{j,1} r_1 + \cdots + a_{j,k-1} r_{k-1} + a_{j,k} r_k + a_{j,k+1} r_{k+1} + \cdots + a_{j,n} r_n - b_j = -s_j$$

$r_k$ in $j$-te Zeile eingesetzt ($j \neq i$):

$$\left(a_{j,1} - a_{j,k} \frac{a_{i,1}}{a_{i,k}}\right) r_1 + \cdots + \left(a_{j,k-1} - a_{j,k} \frac{a_{i,k-1}}{a_{i,k}}\right) r_{k-1} - \frac{a_{j,k}}{a_{i,k}} s_i$$

$$+ \left(a_{j,k+1} - a_{j,k} \frac{a_{i,k+1}}{a_{i,k}}\right) r_{k+1} + \cdots + \left(a_{j,n} - a_{j,k} \frac{a_{i,n}}{a_{i,k}}\right) r_n - \left(b_j - a_{j,k} \frac{b_i}{a_{i,k}}\right)$$

# Basiswechsel am Simplex-Tableau (3)

$$
\begin{array}{cccccc|c|c}
r_1 & r_2 & \cdots & r_k & \cdots & r_n & & \\
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} & -b_1 & -s_1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n} & -b_i & -s_i \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} & -b_m & -s_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_k & \cdots & c_n & \delta & Z
\end{array}
$$

**Zusammenfassung Basiswechsel $r_k \leftrightarrow s_i$**

Pivotelement $a_{i,k} \to \frac{1}{a_{i,k}}$

Pivotzeile $j \neq k$ $a_{i,j} \to \frac{a_{i,j}}{a_{i,k}}$, $-b_i \to \frac{-b_i}{a_{i,k}}$

Pivotspalte $i \neq k$ $a_{j,k} \to -\frac{a_{j,k}}{a_{i,k}}$, $c_k \to -\frac{c_k}{a_{i,k}}$

andere Elemente $i \neq j,\ k \neq l$ $a_{j,l} \to a_{j,l} - a_{j,k}\frac{a_{i,l}}{a_{i,k}}$,

$-b_j \to -b_j - a_{j,k}\frac{-b_i}{a_{i,k}}$, $c_l \to c_l - c_k\frac{a_{i,l}}{a_{i,k}}$,

$\delta \to \delta - c_k\frac{-b_i}{a_{i,k}}$

# Gedächtnishilfe

**zum Merken** ($p$ = Pivot)

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{q}{p} \\ -\frac{r}{p} & s - \frac{rq}{p} \end{bmatrix}$$

# Zum Simplex-Algorithmus

noch offen Wahl des Pivot-Elements

noch offen Korrektheit = partielle Korrektheit und Endlichkeit

## Definition 14.28

- Zeile $i$ gut $\Leftrightarrow b_i \geq 0$ (bzw. $-b_i \leq 0$)
- Zeile $i$ sonst schlecht
- $G := \{l \mid l \in \{1, \ldots, m\}$ und $l$ gut$\}$

# Der Simplex Algorithmus

**1. Phase** Finden eines zulässigen Basispunkts

1. Wenn $G = \{1, \ldots, m\}$
   dann Ausgabe Zulässiger Basispunkt gefunden. **STOP**
2. $s := \min\{l \mid b_l < 0\}$ (oberste schlechte Zeile)
3. Wenn $\min\{a_{s,1}, \ldots, a_{s,n}\} \geq 0$
   dann Ausgabe Zulässige Menge leer. **STOP**
4. Wähle $k_0$ mit $a_{s,k_0} < 0$. Wähle Pivotzeile $p$ so, dass $\frac{b_p}{a_{p,k_0}} = \min\left\{\frac{b_j}{a_{j,k_0}} \mid j \in G \text{ und } a_{j,k_0} > 0\right\}$.
   Wenn $\left\{\frac{b_j}{a_{j,k_0}} \mid j \in G \text{ und } a_{j,k_0} > 0\right\} = \emptyset$,
   dann wähle $p := s$.
5. Führe Basiswechsel um Pivotelement $a_{p,k_0}$ durch.
6. Fahre mit neuem Simplex-Tableau bei Zeile 1 fort.

# Der Simplex Algorithmus (2)

**2. Phase** Minimieren von $Z$ auf zulässigen Basispunkten

**Voraussetzung** $G = \{1, \ldots, m\}$ (Basispunkt zulässig)

1. Wenn $\min\{c_1, \ldots, c_n\} \geq 0$
   dann Ausgabe Basispunkt optimal. **STOP**
2. Wähle $k_0$ mit $c_{k_0} < 0$. Wähle Pivotzeile $p$ so,
   dass $\frac{b_p}{a_{p,k_0}} = \min\left\{\frac{b_j}{a_{j,k_0}} \mid j \in G \text{ und } a_{j,k_0} > 0\right\}$.
   Wenn $\left\{\frac{b_j}{a_{j,k_0}} \mid j \in G \text{ und } a_{j,k_0} > 0\right\} = \emptyset$,
   dann Ausgabe $Z \to -\infty$. **STOP**
3. Führe Basiswechsel um Pivotelement $a_{p,k_0}$ durch.
4. Fahre mit neuem Simplex-Tableau bei Zeile 1 fort.

zu Zeile 2: $k_0$-te N-BV $\rightsquigarrow$ Basis; andere N-BV bleiben 0

$\rightsquigarrow$ $i$-te Gleichung $a_{i,k_0} r_{k_0} + s_i = b_i$ mit $b_i \geq 0$

$a_{i,k_0} \leq 0 \rightsquigarrow r_{k_0}$ kann beliebig wachsen; mit $c_{k_0} < 0 \rightsquigarrow Z \to -\infty$

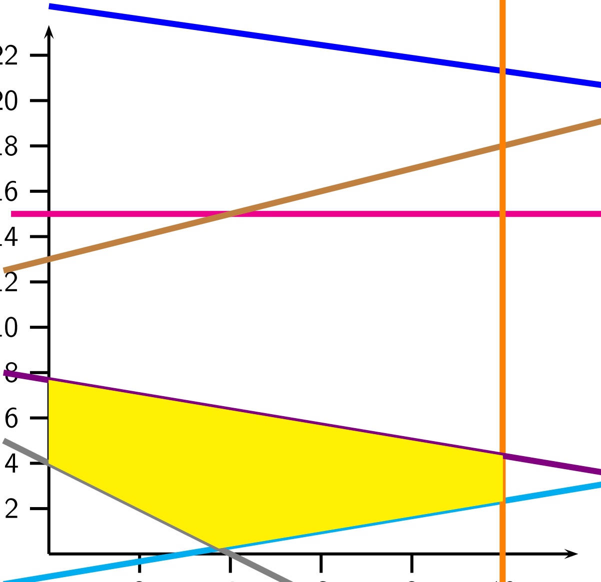
$a_{i,k_0} > 0 \rightsquigarrow r_{k_0} = \frac{b_i - s_i}{a_{i,k_0}} \leq \frac{b_i}{a_{i,k_0}}$ stärkste Beschränkung für $r_{k_0}$

# Noch ein **winziges** Beispiel

$$-4x_1 - x_2 \to \min$$

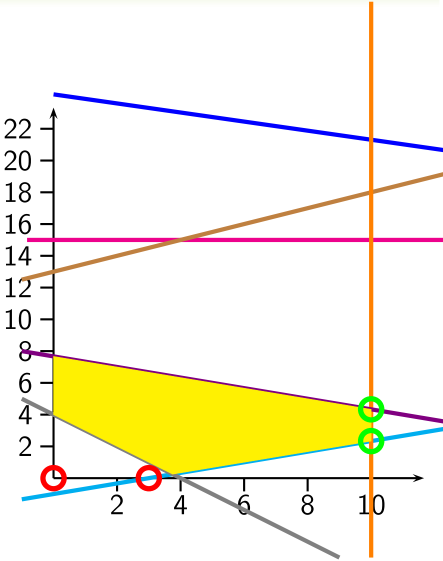
unter
$$\tfrac{1}{4}x_1 + x_2 \le 18\tfrac{1}{2}$$
$$x_2 \le 15$$
$$x_1 - 3x_2 \le 3$$
$$-\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 \le 13$$
$$-x_1 - x_2 \le -4$$
$$x_1 \le 10$$
$$x_1 + 3x_2 \le 23$$

und $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$



# Noch ein **winziges** Beispiel (2)

| $u_7$ | $u_6$ | | |
|---|---|---|---|
| $-0.333$ | $0.083$ | $-11.667$ | $u_1$ |
| $-0.333$ | $0.333$ | $-10.667$ | $u_2$ |
| $0.000$ | $1.000$ | $-10.000$ | $x_1$ |
| $-0.333$ | $0.833$ | $-13.667$ | $u_4$ |
| $0.333$ | $0.667$ | $-10.333$ | $u_5$ |
| $0.333$ | $-0.333$ | $-4.333$ | $x_2$ |
| $1.000$ | $-2.000$ | $-6.000$ | $u_3$ |
| $0.333$ | $3.667$ | $-44.333$ | $Z$ |




$Z((10, 4.333)) = -44.333$ optimal

# Zwischen-Fazit Simplex-Algorithmus

| | |
|---|---|
| zur 1. Phase | Ausgabe Zulässiger Basispunkt gefunden korrekt |
| | Ausgabe Zulässige Menge leer korrekt |
| | **gesamt** Ausgabe korrekt |
| zur 2. Phase | Ausgabe Basispunkt optimal korrekt |
| | Ausgabe $Z \to -\infty$ korrekt |
| | neuer Basispunkt zulässig |
| | **gesamt** Ausgabe korrekt |

**Theorem 14.30**

Der Simplex-Algorithmus ist partiell korrekt.
Basiswechsel ist in Zeit $O(nm)$ durchführbar.

**Endlichkeit fehlt uns noch!**

# Degenerierte Probleme

**Definition 14.31**

Ein lineares Optimierungsproblem heißt degeneriert, wenn es unter den $n+m$ Hyperebenen $n+1$ Hyperebenen mit nicht leerem Schnitt gibt.

Beobachtungen

- $0$ in $b$-Spalte $\Rightarrow$ degeneriert
- degeneriert $\Rightarrow$ $\exists$ äquiv. Simplex-Tableau mit $0$ in $b$-Spalte

# Ein technisches Lemma

**Lemma 14.32**

Wenn Pivotelement $a_{p,k_0}$ gewählt wird, dann $\frac{b_p}{a_{p,k_0}} \geq 0$.

**Beweis.**

$\left\{ \frac{b_j}{a_{j,k_0}} \mid j \in G \text{ und } a_{j,k_0} > 0 \right\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ gute $p$-Zeile wird gewählt, also $b_p \geq 0$ mit $a_{p,k_0} > 0$ ✓

$\left\{ \frac{b_j}{a_{j,k_0}} \mid j \in G \text{ und } a_{j,k_0} > 0 \right\} = \emptyset$

$\Rightarrow p = s$, $s$ schlecht, also $b_p < 0$; außerdem $a_{p,k_0} < 0$ □

# Zur Endlichkeit. . .

## Theorem 14.33

Der Simplex-Algorithmus ist **für nicht degenerierte Probleme** endlich.

Beweis.

Teil 1: Phase 1 endet in endlicher Zeit.

Betrachte einen Basiswechsel:

$$\text{Simplex-Tableau} \quad \begin{array}{c} r \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a & -b \\ \hline c & \delta \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} -s \\ Z \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} r' \\ \begin{array}{|c|c|} \hline a' & -b' \\ \hline c' & \delta' \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} -s' \\ Z \end{array}$$

**Behauptungen:**

- $b_g \geq 0 \Rightarrow b'_g \geq 0$ (gut bleibt gut)
- $b'_s > b_s$ (schlecht wird besser)

# Beweis von Theorem 14.33 (2)

Behauptung: $b_g \geq 0 \Rightarrow b'_g \geq 0$ (gut bleibt gut)

Pivotzeile $p$: $b'_p = \frac{b_p}{a_{p,k_0}}$ gemäß Algorithmus und $\frac{b_p}{a_{p,k_0}} \geq 0$
nach Lemma 14.31 (sogar $> 0$, da nicht degeneriert)
also Pivotzeile auf jeden Fall gut

andere Zeile $i$: $b'_i = b_i - \underbrace{a_{i,k_0} \cdot \frac{b_p}{a_{p,k_0}}}_{\Delta_i}$ gemäß Algorithmus

1. Fall: $a_{i,k_0} \leq 0$

$\Delta_i \leq 0 \Rightarrow b'_i = b_i - \Delta_i \geq b_i \geq 0$ ✓

2. Fall: $a_{i,k_0} > 0$

bei Berechnung von $p$ auch Zeile $i$ betrachtet
darum $\frac{b_i}{a_{i,k_0}} \geq \frac{b_p}{a_{p,k_0}}$

$\Rightarrow b'_i = b_i - \frac{a_{i,k_0} b_p}{a_{p,k_0}} = a_{i,k_0} \left( \frac{b_i}{a_{i,k_0}} - \frac{b_p}{a_{p,k_0}} \right) \geq 0$ ✓

# Beweis von Theorem 14.33 (3)

Behauptung: $b'_s > b_s$ (schlecht wird besser)

Pivotzeile $p$: wird auf jeden Fall gut (gerade gesehen) $\checkmark$

andere Zeile $i$: $b'_i = b_i - \underbrace{a_{i,k_0} \cdot \frac{b_p}{a_{p,k_0}}}_{\Delta_i}$ gemäß Algorithmus

$$a_{i,k_0} < 0 \text{ und } \frac{b_p}{a_{p,k_0}} > 0$$

$$\text{also } \Delta_i < 0 \text{ und } b'_i > b_i \ \checkmark$$

Da Anzahl Basispunkte endlich, wird schlechte Zeile in endlicher Zeit gut.

Also stoppt 1. Phase mit zulässigem Basispunkt oder $M = \emptyset$. $\checkmark$

# Beweis von Theorem 14.33 (4)

Teil 2: Phase 2 endet in endlicher Zeit.

Start mit zulässigem Basispunkt

wie in Phase 1: gute Zeile bleiben gut
immer zulässiger Basispunkt

**Behauptung:** $\delta' < \delta$

$\delta' = \delta + c_{k_0} \frac{b_p}{a_{p,k_0}}$ gemäß Algorithmus

$c_{k_0} < 0$ und $a_{p,k_0} > 0$ gemäß Wahl von $k_0$

$b_p > 0$, weil nicht degeneriert

also $\delta' < \delta$

Da Anzahl Basispunkte endlich,
nach endlichen vielen Schritten optimale Lösung oder $Z \to -\infty$.

$\square$

# Endlichkeit des Simplex-Algorithmus

Was ist bei degenerierten Problemen?

Wenn wir Glück haben, hält der Algorithmus in endlicher Zeit.
Dann ist das Ergebnis korrekt.

Wenn wir Pech haben, hält der Algorithmus nicht.

Kann man Endlichkeit nicht immer erreichen?

Doch! Alle Entscheidungen merken und Wiederholung vermeiden.
Speicherbedarf für praktische Zwecke zu groß

in der Praxis randomisierte Entscheidungen
$\rightsquigarrow$ endliche erwartete Rechenzeit

# Endliche viele Schritte...

Wie schnell oder langsam ist der Simplex-Algorithmus?

- im Worst Case exponentielle Rechenzeit
- Worst Case Instanzen sind schwierig zu finden
- in der Praxis sehr schnell
- Worst Case Instanzen sind „empfindlich“:
  „wackeln“ $\rightsquigarrow$ polynomielle Rechenzeit (smoothed complexity)
- Es gibt (eher unpraktische) Polynomialzeitalgorithmen.

# Heuristische Verbesserungen

Simplex-Algorithmus ist empirisch guter Algorithmus.
Einige Ideen, um ihn empirisch noch besser zu machen:
(Ideen ohne Nachweis $\rightsquigarrow$ Heuristiken)

- besserer Umgang mit unbeschränkten Variablen
- besserer Umgang mit nach oben beschränkten Variablen
- schnellere Lösung „ähnlicher" Optimierungsprobleme

# Unbeschränkte Variable

bisher $x_i \in \mathbb{R} \rightsquigarrow x'_i - x''_i$ mit $x'_i, x''_i \geq 0$

**Nachteil:** eine Variable mehr

neu Lasse unbeschränkte Variable direkt zu.

klar Macht Algorithmus komplizierter.

Ideen

- Phase 1: Gleichungen mit unbeschränkten Variablen bei Wahl von Pivotzeile und -spalte ignorieren, ansonsten unverändert
- Phase 2:
  - Optimalitätskriterium $c \geq 0$ greift nicht mehr
  - unbeschränkte Variable für $c_k \neq 0$ berücksichtigen
  - optimal, wenn keine Variable wählbar
  - bei Wahl unbeschränkter Variable als Pivotzeile auf Zulässigkeit des Basispunkts achten

# Nach oben beschränkte Variable

bisher $x_i \leq \alpha_i \rightsquigarrow$ Nebenbedingung

**Nachteil:** eine Nebenbedingung mehr

neu Lasse nach oben beschränkte Variable direkt zu.

klar Macht Algorithmus komplizierter.

Ideen

- erweitere Definition von Basispunkt
  - Werte 0 und $\alpha_i$ zugelassen
  - optimal, wenn keine erlaubte Änderung Zielfunktion vermindert
- $Z \to -\infty$ nicht von beschränkten $x_i$ abhängig
- Phase 1: $x_i > \alpha_i$ bei Zulässigkeit beachten
- Phase 2:
  - Richtung der erlaubten Änderung bei Basiswechsel beachten
  - bei Wahl der neuen N-BV stärkste Beschränkung wählen

# Hinzufügen einer Variablen

Sei $Z = c^T x \to \min$ mit $Ax = b$ und $x \geq 0$ gelöst.
Lösung $x^*$ zur Basis $B^*$

neues Problem durch Hinzufügen von $x_{n+1}$ und einer Spalte in $A$

Können wir das schneller lösen?

Vermutlich ist $(x^*, 0)$ besserer Startpunkt.

Wenn „Weg zu $B^*$“ bekannt, ist das nutzbar.

Muss man das alles speichern?

# Hinzufügen einer Variablen (2)

$Z = c^T x \to \min$ mit $Ax = b$ und $x \geq 0$ mit Lösung $x^*$ zur Basis $B^*$ bekannt

neues Problem durch Hinzufügen von $x_{n+1}$ und einer Spalte in $A$

Wunsch Verwendung von $(x^*, 0)$ als Startpunkt

Einsicht Weg von Startbasis $B$ zu $B^*$ unerheblich

kürzester Weg hat Länge $\min\{n, m\}$
$\leadsto$ Rechenzeit $O(mn \min\{m, n\})$

Mit Hilfe von Theorem 14.26 geht es sogar noch direkter. . .

# Wiederholung: Theorem 14.26 und sein Beweis

**Theorem 14.26**

Ist Simplex-Tableau zur Basis $x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ äquivalent zu einem linearen Optimierungsproblem gehörigen Simplex-Tableau, so sind die Hyperebenen $u_1 = 0, \ldots, u_k = 0, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ linear unabhängig.
Der Schnittpunkt der Hyperebenen ist, falls zulässig, Extrempunkt der zulässigen Menge.

**Beweis.** Schreibe Hyperebenen als Gleichungen in ursprünglichen $x$-Variablen:

$u_i = 0 \rightsquigarrow a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$

$x_{k+j} = 0$ bleibt so

# Beweis von Theorem 14.26 (Fortsetzung)

Betrachte Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

klar: Hyperebenen linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $A$ invertierbar

betrachte $A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$

klar: $A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $A^{(k)}$ invertierbar

# Beweis von Theorem 14.26 (Fortsetzung (2))

Betrachte Koeffizientenmatrix $A'$ zum Tableau zur Basis
$x_1, \ldots, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$.
Mit $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ haben wir
$-x^{(k)} = A'^{(k)} u^{(k)} - b'^{(k)}$
aus dem Originaltableau: $-u^{(k)} = A^{(k)} x^{(k)} - b^{(k)}$
Einsetzen liefert:
$-x^{(k)} = A'^{(k)} \left(-A^{(k)} x^{(k)} + b^{(k)}\right) - b'(k)$
also: $x^{(k)} = A'^{(k)} A^{(k)} x^{(k)} - A'^{(k)} b^{(k)} + b'^{(k)}$
Gilt insbesondere für $x^{(k)} = 0^{(k)}$,
also $-A'^{(k)} b^{(k)} + b'^{(k)} = 0^{(k)}$
also $x^{(k)} = A'^{(k)} A^{(k)} x^{(k)}$ für alle $x^{(k)}$
also $A'^{(k)} = \left(A^{(k)}\right)^{-1}$ und $A^{(k)}$ invertierbar $\square$

# Hinzufügen einer Variablen (Fortsetzung)

gesehen Inverse von $A^{(k)}$ oben links im Tableau

Was passiert dabei mit der $(n+1)$-ten Spalte?

Betrachte $\left(a^{n+1}\right)^{(k)}$ Anfang der Länge $k$ dieser Spalte

$$B := \begin{pmatrix} a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix}, \, x' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

im Starttableau $A^{(k)}x^{(k)} + Bx' + (a^{n+1})^{(k)}x_{n+1} - b^{(k)} = -u^{(k)}$

$\Rightarrow \left(A^{(k)}\right)^{-1} u^{(k)} + \left(A^{(k)}\right)^{-1} Bx' + \left(A^{(k)}\right)^{-1} (a^{n+1})^{(k)}x_{n+1} - \left(A^{(k)}\right)^{-1} b^{(k)} = -x^{(k)}$

$\left(A^{(k)}\right)^{-1}$ ablesbar, nur $\left(A^{(k)}\right)^{-1} \left(a^{n+1}\right)^{(k)}$ neu zu berechnen

# Hinzufügen einer Variablen (Fortsetzung (2))

Was ist mit restlichen $a$-Elementen und $c_{n+1}$?

Beobachtung niemals in der Pivot-Zeile
immer Regel $s \rightarrow s - \frac{rq}{p}$

$k = 1$
$$c_{n+1}^{(\text{neu})} = c_{n+1} - \left(a_{\text{neu}}^{n+1}\right)_1 c_1$$
$k = 2$
$$c_{n+1}^{(\text{neu})} = c_{n+1} - \left(a_{\text{neu}}^{n+1}\right)_1 c_1 - \left(a_{\text{neu}}^{n+1}\right)_2 c_2$$
allgemein (Beweis per Induktion)
$$c_{n+1}^{(\text{neu})} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{k} \left(a_{\text{neu}}^{n+1}\right)_i c_i$$

analog für $a$

also verschiedene effiziente Methoden verfügbar

# Eine andere Perspektive

zunächst nur am Beispiel

$$Z(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 \to \max$$

unter

$$x_1 - x_2 \leq 0 \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 7 \quad (2)$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 8 \quad (3)$$

Idee Schranken für optimale Lösung aus Nebenbedingungen

zum Beispiel (1) + (2) $\leadsto 3x_1 \leq 7$

$\leadsto Z(x_1, x_2) \leq 7$

zum Beispiel $2 \cdot$ (3) $+ 5 \cdot$ (1) $\leadsto 3x_1 + x_2 \leq 16$

$\leadsto Z(x_1, x_2) \leq 16$

allgemein $y_1 \cdot$ (1) $+ y_2 \cdot$ (2) $+ y_3 \cdot$ (3)

$$\leadsto (y_1 + 2y_2 - y_3) \cdot x_1 + (-y_1 + y_2 + 3y_3) \cdot x_2$$

$$\leq 0 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2 + 8 \cdot y_3 = 7y_2 + 8y_3$$

# Eine andere Perspektive (Fortsetzung)

$$Z(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 \to \max$$

unter
$$x_1 - x_2 \leq 0 \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 \leq 7 \quad (2)$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 8 \quad (3)$$

allgemein $y_1 \cdot (1) + y_2 \cdot (2) + y_3 \cdot (3)$

$\rightsquigarrow (y_1 + 2y_2 - y_3) \cdot x_1 + (-y_1 + y_2 + 3y_3) \cdot x_2$
$\leq 7y_2 + 8y_3$

Vergleich mit ursprünglichem Problem

$\rightsquigarrow$
- $y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3$
- $-y_1 + y_2 + 3y_3 \geq -2$

$\Rightarrow Z(x_1, x_2) \leq 7y_2 + 8y_3$

also $Z'(y_1, y_2, y_3) = 7y_2 + 8y_3 \to \min$

unter
$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3$$
$$-y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

# Am Beispiel gesehen...

gesehen

- LP mit $n$ Variablen und $m$ Nebenbedingungen
  $\rightsquigarrow$ LP mit $m$ Variablen und $n$ Nebenbedingungen
- Koeffizienten durch „Umsortieren"

**Definition 14.34**

Zu einem primalen Problem $Z(x) = c^T x \rightarrow \min$ unter $Ax \geq b$ und $x \geq 0$ heißt das Problem $Z'(y) = b^T y \rightarrow \max$ unter $A^T y \leq c$ und $y \geq 0$ das duale Problem.

**Theorem 14.35**

Sei $P$ ein primales Problem der linearen Optimierung, sei $P'$ das zu $P$ duale Problem, sei $P''$ das zu $P'$ duale Problem. Dann sind $P$ und $P''$ äquivalent.