Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2008

Ingo Wegener

Lineare Optimierung

Minimiere	eine lineare Zielfunktion über $x_1, \dots, x_n$
unter	m linearen Nebenbedingungen
durch	Wahl der $x_j \geq 0$.

Minimiere	$Z(x) := c_1x_1 + c_2x_2 \cdots + c_nx_n$
bei Beachtung von	$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i$
m Nebenbedingungen	mit $i \in \{1, \dots, m\}$
und	$x_j \geq 0$ mit $j \in \{1, \dots, n\}$.

Eingabe $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Ausgabe $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0$ mit $Ax \leq b$

und $Z(x) = c^T x = \min\{c^T x'\}$

alle Zahlen im Prinzip $\in \mathbb{R}$, im Rechner natürlich $\in \mathbb{Q}$

Lineare Optimierung — Na, und?

Wen interessiert denn das?

Uns! $\leadsto$ MAX-SAT mit randomisiertem Runden

Aber wir wollten Maximieren und es sah auch anders aus?

Das Problem ist allgemeiner als es aussieht

- $\rightarrow \max \leadsto \rightarrow \min$ durch $Z(x) \leadsto -Z(x)$
- $\geq \leadsto \leq$ durch $\cdot(-1)$
- $= \leadsto \leq$ und $\geq$
- $x_i \in \mathbb{R} \leadsto x_i' \geq 0$ und $x_i'' \geq 0$ mit $x_i = x_i' - x_i''$

Und wie ersetzen wir $<$?

Gar nicht. $<$ ist „unnatürlich“ und „hässlich“.

$$\begin{array}{rl} \text{Minimiere} & -1 \cdot x_1 \\ \text{unter} & x_1 < 1 \quad \text{hat keine Lösung.} \\ \text{und} & x_1 \geq 0 \end{array}$$

Geometrische Interpretation

$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$
beschreibt Hyperebene der Dimension $n-1$ im $\mathbb{R}^n$
(Gerade im $\mathbb{R}^2$, Ebene im $\mathbb{R}^3$)

Nebenbedingung
$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots a_{i,n}x_n \leq b_i$
beschreibt Halbraum „unter" der Hyperebene

Menge M der zulässigen Lösungen
ist der Schnitt aller dieser Halbräume

Wie sieht eine Lösung aus?

1) $M = \emptyset$ unzulässiges Problem
2) $M \neq \emptyset$, M beschränkt eindeutige Lösung
3) $M \neq \emptyset$, M unbeschränkt, $Z(x) \to -\infty$ in M keine Lösung
4) $M \neq \emptyset$, M unbeschränkt, $Z(x)$ beschränkt in M eindeutige Lösung

Ein **winziges** Beispiel

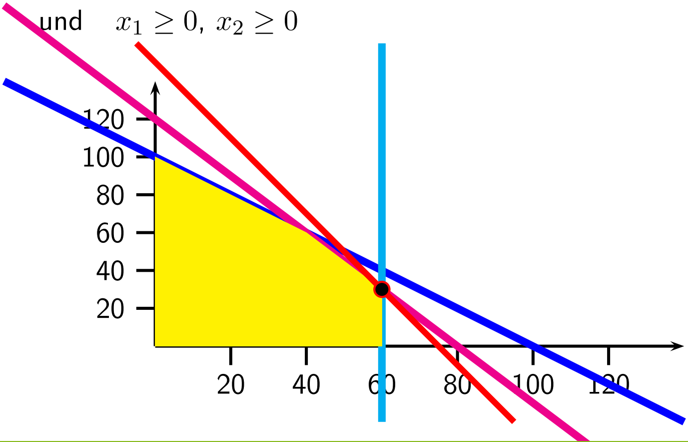
$$-20x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$$

unter $x_1 + x_2 \leq 100$

$9x_1 + 6x_2 \leq 720$

$x_1 \leq 60$

und $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



Was glauben wir nach dem Beispiel?

Wenn es eine Lösung gibt, liegt sie „am Rand“ von M,
also in einer Ecke oder auf eine Kante.
Dann auf jeden Fall Ecke ist optimale Lösung

Lösungsidee Schaue dir alle Ecken von M.
Wähle eine mit minimalem Z-Wert.

Wie viele Ecken gibt es?

Punkt im $\mathbb{R}^n$ bestimmt durch Schnitt von n Hyperebenen

Wir wählen aus $n + m$ Bedingungen n aus ...
... also bis zu $\binom{n+m}{n}$ Ecken

Wir sollten Ecken geschickt wählen!

Problem Glauben reicht nicht aus.

Einige Definitionen (Definition 14.1)

- Länge von $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $||x|| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- Abstand von $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ist $||x_1 - x_2||$
- Kugel mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r \in \mathbb{R}_0^+$ ist $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - m|| \leq r\}$
- Gerade mit Richtung $y \neq 0$ ist $g := \{x + \lambda y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Halbgerade mit Richtung $y \neq 0$ ist $\{x + \lambda y \mid \lambda \in \mathbb{R}_0^+\}$
- Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn $\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall x \in M \colon ||x|| \leq c$
- Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn $\lim\limits_{i \to \infty} x_i \in M$ für alle konvergente Folgen $(x_i \in M)_{i=1,\ldots,\infty}$
- Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen

Über Abstände

Lemma 14.2

g Gerade. Für alle Geradenpunkte $g(\lambda) = x + \lambda y$ gilt a) oder b):

a) $\forall \lambda' > \lambda$: $||g(\lambda')|| > ||g(\lambda)||$

b) $\forall \lambda' < \lambda$: $||g(\lambda')|| > ||g(\lambda)||$

Beweis.

klar $(||g(\lambda')|| > ||g(\lambda)||) \Leftrightarrow ||g(\lambda')||^2 > ||g(\lambda)||^2$

$$||g(\lambda')||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda' y_i)^2 =$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}_{=:c_1} \cdot \lambda'^2 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 2x_i y_i\right)}_{=:c_2} \cdot \lambda' + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{=:c_3}$$

Weil $y \neq 0$, ist $c_1 > 0$.

Also ist $||g(\lambda')||^2$ Parabel und darum streng monoton. $\square$

Konvexe Mengen

Definition 14.3

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \le \lambda \le 1\}$ die Verbindungsstrecke zwischen x und y.
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn
$\forall x, y \in M\colon \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid 0 \le \lambda \le 1\} \subseteq M$ gilt.

Lemma 14.4

$M_1, M_2, \ldots, M_l$ konvex $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{l} M_i$ konvex

Beweis.

$\forall x, y \in M\colon \forall i\colon x, y \in M_i$
Weil alle M_i konvex, ist Verbindungsstrecke in allen M_i.
Also ist Verbindungsstrecke in M. □

Zulässige Mengen

Lemma 14.5

Halbraum $H := \{x \mid ax \leq b\}$ ist konvex.

Beweis.

$x, y \in H$: $ax \leq b$ und $ay \leq b$
$a \cdot (\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda ax + (1-\lambda)ay \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$ □

Theorem 14.6

Zulässige Menge eines Problems der linearen Optimierung ist Durchschnitt von $n+m$ abgeschlossenen Halbräumen, konvex und abgeschlossen.

Konvexe Hülle

Definition 14.7

Konvexe Hülle KoHü(M) von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\bigcap\limits_{S \supseteq M, S \text{ konvex}} S$.

Definition 14.8

$x \in \mathbb{R}^n$ ist konvexe Linearkombination (kL) von $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$, wenn $\exists \lambda_i \geq 0$ mit $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ und $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

Theorem 14.9

KoHü$(M) = \{x \mid x$ ist kL von Punkten aus M$\}$

Theorem 14.9

KoHü$(M) = S := \{x \mid x$ ist kL von Punkten aus M$\}$

Beweis.

„$S \subseteq$ KoHü(M)“

$$x \in S\colon\ \exists x_1, \ldots, x_p \in M\colon \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in [0;1]\colon x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Induktion über p $p = 1$: $x = 1 \cdot x_1$ mit $x_1 \in M \subseteq$ KoHü(M) ✓

Induktionsschritt $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, o. B. d. A. $\lambda_p < 1$ (sonst trivial)

$$x = (1 - \lambda_p) \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_p} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{p-1}}{1 - \lambda_p} x_{p-1}\right)}_{x'} + \lambda_p x_p$$

$x' \in$ KoHü(M) nach I.-V.

KoHü(M) konvex, also $x \in$ KoHü(M), weil x auf

Verbindungsstrecke von $x' \in$ KoHü(M) und $x_p \in$ KoHü(M). ✓

Theorem 14.9

KoHü$(M) = S := \{x \mid x$ ist kL von Punkten aus M$\}$

„KoHü$(M) \subseteq S$“

$\forall x \in M\colon x = 1 \cdot x$, also kL, also $M \subseteq S$.

zu zeigen S konvex

$y, z \in S$, $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$ und $z = \lambda'_1 x'_1 + \cdots + \lambda'_q x'_q$

zu zeigen $\forall \lambda \in [0;1]\colon \lambda y + (1-\lambda) z \in S$

$\lambda y + (1-\lambda) z = \lambda\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda\lambda_p x_p + (1-\lambda)\lambda'_1 x'_1 + \cdots + (1-\lambda)\lambda'_q x'_q$

Weil $\lambda \in [0;1], \lambda_i \in [0;1], \lambda'_j \in [0;1]$, auch $\lambda\lambda_i \in [0;1]$ und $(1-\lambda)\lambda'_j \in [0;1]$.

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda\lambda_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{q} (1-\lambda)\lambda'_j\right) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) + (1-\lambda)\left(\sum_{j=1}^{q} \lambda'_j\right)$$

$$= \lambda + (1-\lambda) = 1$$ □

Rand- und Extrempunkte

Wir glauben, dass Optima in Ecken liegen.

Wir brauchen Formalisierung von „Ecke“.

Definition 14.10

$x \in M$ (M konvex) heißt

- Randpunkt, wenn $\forall \varepsilon > 0$: ε-Kugel um x nicht ganz in M
- Extrempunkt, wenn $\forall y \neq 0$: $x + y \notin M$ oder $x - y \notin M$

Lemma 14.11

x Extrempunkt von $M \Rightarrow x$ Randpunkt von M

Beweis.

Annahme Extrempunkt x nicht Randpunkt. Betrachte ε-Kugel um x in M.Für jedes y mit $||y|| < \varepsilon$ ist $\{x + y, x - y\} \subseteq M$.
Widerspruch $\square$

Lage von Extrem- und Randpunkten

Lemma 14.12

$M_1, \ldots, M_t$ konvex, $M := \bigcap_{i=1}^{t} M_i$.

x Randpunkt von $M \Rightarrow \exists i\colon$ x Randpunkt von M_i

Beweis.

Annahme x für jedes M_i nicht Randpunkt.

$\exists \varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_t\colon$ jede ε_i-Kugel um x ist ganz in M_i.

$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t\}$. ε-Kugel um x ganz in M Widerspruch $\square$

Lage von Rand- und Extrempunkten (2)

Lemma 14.13

M konvexe Menge, K Kugel.
Jeder Extrempunkt x von $M \cap K$ ist Extrempunkt von M oder K.

Beweis.

x Extrempunkt von $M \cap K \Rightarrow x$ Randpunkt von $M \cap K$
$\Rightarrow x$ Randpunkt von M oder K
Kugel Randpunkt $\Leftrightarrow$ Extrempunkt

Falls x Randpunkt von K, fertig. ✓
noch offen x Randpunkt von M, aber nicht von K
Annahme x kein Extrempunkt von M. $\rightsquigarrow \exists y\colon \{x+y, x-y\} \subseteq M$.
x kein Randpunkt von K, also $\exists \varepsilon$: ε-Kugel $B(\varepsilon)$ um x ganz in K
Schnitt von $B(\varepsilon)$ mit Verbindungstrecke von $x+y$ und $x-y$
$=$ Verbindungsstrecke von $x+y'$ und $x-y'$ für $y' \neq 0$,
ganz in $M \cap K$.
Widerspruch da x Extrempunkt von $M \cap K$. $\square$

Existenz von Extrempunkten

Lemma 14.14

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt.

- $\exists \max\limits_{x \in M} ||x||$
- $m \in M$ mit $||m|| = \max\limits_{x \in M} ||x|| \Rightarrow m$ Extrempunkt von M

Beweis.

Existenz von $\max\limits_{x \in M} ||x||$ gesichert,
da Distanz stetig und M kompakt.
Annahme m kein Extrempunkt.
$\exists y \neq 0$: Verbindungsstrecke von $m + y$ und $m - y$ komplett in M
Punkte auf Verbindungsstrecke zwischen m und $m + y$ oder
zwischen m und $m - y$ haben größeren Abstand von 0.
Widerspruch $\square$

Trennende Hyperebenen

Definition 14.15

Menge M liegt ganz auf einer Seite der Hyperebene
$H = \{y \mid u \cdot y = c\}$, wenn $\forall m \in M\colon u \cdot m \leq c$ oder $u \cdot m \geq c$.

Lemma 14.16

$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen, $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

- $\exists z^* \in M$ mit $||z - z^*|| = \min_{x \in M} ||z - x||$
- für Hyperbene $H := \left\{y \mid \frac{z^*-z}{||z^*-z||} \cdot y = \frac{z^*-z}{||z^*-z||} \cdot z^*\right\}$ gilt:
  $\forall m \in M\colon \frac{z^*-z}{||z^*-z||} \cdot m \geq \frac{z^*-z}{||z^*-z||} \cdot z^*$

Beweis von Lemma 14.16

Existenz von z^* gesichert, da $||z-x||$ auf M stetig und durch 0 nach unten beschränkt.

$u := \frac{z^*-z}{||z^*-z||}$, $||u|| = 1$

$u \cdot (z^* - z) > 0$, also $u \cdot z < u \cdot z^*$.

zu zeigen $\forall m \in M : u \cdot m \geq u \cdot z^*$

Betrachte $m \in M$ und $w_\lambda := \lambda m + (1-\lambda)z^*$ mit $\lambda \in [0;1]$.

M konvex $\Rightarrow w_\lambda \in M$

Betrachte $f(\lambda) := ||w_\lambda - z||^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (w_\lambda - z)^2 \\ &= (\lambda m + (1-\lambda)z^* - z)^2 \\ &= (\lambda(m - z^*) + (z^* - z))^2 \\ &= \lambda^2(m-z^*)^2 + 2\lambda(m-z^*)(z^*-z) + (z^*-z)^2 \end{aligned}$$

Betrachte Ableitung $f'(\lambda) = 2\lambda(m-z^*)^2 + 2(m-z^*)(z^*-z)$.

$f'(0) = 2(m-z^*)(z^*-z) = d \cdot u \cdot (m - z^*)$ für ein $d > 0$

Beweis von Lemma 14.16 (Fortsetzung)

$f'(0) = 2(m - z^*)(z^* - z) = d \cdot u \cdot (m - z^*)$ für ein $d > 0$

Annahme $f'(0) < 0$.

$\exists \lambda_0 > 0\colon f(\lambda_0) < f(0)$

$||z - w_{\lambda_0}|| < ||z - z^*||$ Widerspruch

$f'(0) \geq 0 \Rightarrow u \cdot (m - z^*) \geq 0$

$\Rightarrow u \cdot m \geq u \cdot z^*$ □

Trennende Hyperebenen

Lemma 14.17

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen, m_{rand} Randpunkt von M.
$\exists$ Hyperebene $H = \{y \mid u \cdot y = u \cdot m_{\text{rand}}\}$ durch m_{rand} mit
$\forall m \in M\colon u \cdot m \geq u \cdot m_{\text{rand}}$

(ähnlich wie Lemma 14.16, aber $m_{\text{rand}} \in M$)

Beweis.

Betrachte (z_i), $z_i \notin M$, (z_i) konvergiert gegen m_{rand}.
Da m_{rand} Randpunkt, ist ε-Kugel um m_{rand} nicht ganz in M und Existenz von (z_i) ist gesichert.
Betrachte zu jedem z_i ein z_i^* wie in Lemma 14.16, Hyperebene H_i durch u_i beschrieben.
$||u_i|| = 1$ für alle i, also $\exists$ Teilfolge $u_{i(j)}$ konvergiert $\rightarrow u$
$z_i \rightarrow m_{\text{rand}}$, also $z_{i(j)} \rightarrow m_{\text{rand}}$
$\left(\forall m \in M\colon u_{i(j)} \cdot m \geq u_{i(j)} \cdot z^*_{i(j)}\right) \Rightarrow (\forall m \in M u \cdot m \geq u \cdot m_{\text{rand}})$
also $H = \{y \mid u \cdot y = u \cdot m_{\text{rand}}\}$ gesuchte Hyperebene. □

Theorem von Krein und Milman

Theorem 14.18

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt.
$\forall x_0 \in M$: x_0 als kL von $\leq n+1$ Extrempunkten von M darstellbar

Beweis. trivial für $M = \emptyset$, sei also $M \neq \emptyset$.

Induktion über n trivial für $n = 1$: $M = [a; b]$, $a \leq b$ ✓
$n > 1$ M hat Extrempunkt x''.
Trivial für $x_0 = x''$, sei also $x_0 \neq x''$.
Betrachte Gerade g durch x_0 und x'' abgeschlossen und konvex
$g \cap M$ konvex, kompakt, eindimensional — Verbindungsstrecke zwischen x'' und $x' \neq x''$ mit $x' \in g \cap M$, Extrempunkt
Betrachte Hyperbene $H = \{y \mid uy = ux'\}$ mit $x' \in H$ und M ganz auf einer Seite von H, also $\forall m \in M : u \cdot m \geq u \cdot x'$
H konvex, abgeschlossen, $n-1$-dimensional, also $H \cap M$ kompakt, konvex, $n-1$-dimensional
I.-V. x' als kL von $\leq n$ Extrempunkten von $H \cap M$ darstellbar

Beweis von Theorem 14.18

Behauptung Extrempunkte von $H \cap M$ auch Extrempunkte von M
Betrachte Extrempunkt $z \in H \cap M$.
Annahme z kein Extrempunkt von M
$\exists y \neq 0\colon \{z+y, z-y\} \subseteq M$
$u \cdot (z+y) \geq u \cdot x'$ und $u \cdot (z-y) \geq u \cdot x'$
Annahme $u \cdot (z+y) > u \cdot x'$
$u \cdot z = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (z+y+z-y) > \frac{1}{2} \cdot (u \cdot x' + u \cdot x') = u \cdot x'$
also $z \notin M$ Widerspruch — also $u \cdot (z+y) = u \cdot x'$ analog
$u \cdot (z-y) = u \cdot x'$ — also $\{z+y, z-y\} \subseteq H \cap M$, also z kein Extrempunkt von $H \cap M$ Widerspruch

jetzt $x_0 = \lambda x' + (1-\lambda)x''$ und $x' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ mit $p \leq n$, $x_1, \ldots, x_p$
Extrempunkte von M
also $x_0 = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda\lambda_i x_i\right) + (1-\lambda)x'$
kL von $p+1 \leq n+1$ Extrempunkten von M □

Eigenschaften linearer Optimierungsprobleme

Theorem 14.19

M zulässige Menge eines linearen Optimierungsproblems.

- $M \neq \emptyset \Rightarrow M$ hat mindestens einen Extrempunkt
- $M \neq \emptyset \Rightarrow \forall x_0 \in M$: x_0 darstellbar als kL von $x_1, \ldots, x_p \in M$ mit $\lambda_1 > 0$ und x_1 Extrempunkt von M

Beweis.

Beobachtung 1. Aussage folgt aus 2.

M beschränkt, konvex und kompakt (Theorem 14.6)

Aussage folgt dann direkt aus Theorem 14.18

ab jetzt: M unbeschränkt, $x_0 \in M$

$x_0 = 0$ trivial: wegen $x_i \geq 0$ ist $x_0 = 0$ Extrempunkt

$x_0 \neq 0$: Betrachte $(n+2)||x_0||$-Kugel K um 0.

$M \cap K$ konvex und kompakt, also (Theorem 14.18) x_0 als kL von Extrempunkten $x_1, \ldots, x_p$ $(p \leq n+1)$ darstellbar: $x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

Fortsetzung Beweis von Theorem 14.19

$0 \neq x_0 \in M$, $x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, $p \leq n+1$, x_i Extrempunkte von $M \cap K$

Lemma 15: x_i Extrempunkt von M oder K

Annahme: alle x_i Extrempunkte von K

$||x_i|| = (n+2) \cdot ||x_0||$, weil K Kugel

Schubfachprinzip: $\exists \lambda_i \geq \frac{1}{p} \geq \frac{1}{n+1}$

alle $x_j \geq 0$, also alle $\lambda_j x_j \geq 0$

$||x_0|| = ||\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p|| \geq ||\lambda_i x_i|| = \lambda_i ||x_i|| \geq \frac{n+2}{n+1} ||x_0|| > ||x_0||$ Widerspruch $\square$

Einmal Luft holen und nachdenken ...

Wir wissen jetzt schon einiges über Extrempunkte und ihre Lage.

Aber warum interessieren wir uns überhaupt für Extrempunkte?

Wir glauben, dass wir Optima in Extrempunkten finden.

Können wir das beweisen?

Minimum der Zielfunktion

Theorem 14.20

Nimmt Z Minimum auf zulässiger Menge M an, dann nimmt Z Minimum in einem Extrempunkt von M an.

Beweis.

Betrachte $x_0 \in M$ mit $Z(x_0) = \min\{Z(x) \mid x \in M\}$.

Theorem 14.19: $x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i > 0$ für alle i und

x_1 Extrempunkt von M

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Z(x_i) \geq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Z(x_0) = Z(x_0) \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = Z(x_0)$$

also $Z(x_i) = Z(x_0)$, insbesondere $Z(x_1) = Z(x_0)$ $\square$

Auf dem Weg zum Algorithmus

Wir finden garantiert eine optimal Lösung,
wenn wir uns alle Extrempunkte der zulässigen Menge M ansehen.

noch offen Wie finden wir die systematisch?

Müssen wir uns wirklich alle Extrempunkte ansehen?

Kann man einem Extrempunkt vielleicht ansehen,
ob er optimal ist?

Wie erkennt man, dass Z unbeschränkt ist in M?

Lokale Minima von Z

Definition 14.21

Zielfunktion Z definiert auf Menge M. $m \in M$ heißt lokales Minimum, wenn $\exists \varepsilon > 0$: ε-Kugel um m enthält kein $x \in M$ mit $Z(x) < Z(m)$.

Theorem 14.22

Jedes lokale Minimum der linearen Zielfunktion Z auf der zulässigen Menge M ist ein globales Minimum.

Beweis.

Betrachte lokales Minimum $x_0 \in M$.
Annahme: $\exists x_1 \in M: Z(x_1) < Z(x_0)$
M konvex: Verbindungsstrecke zwischen x_0 und x_1 ganz in M
$0 < \lambda < 1$: $Z(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) = \lambda Z(x_0) + (1-\lambda)Z(x_1) < Z(x_0)$
$\lambda \to 1$: $\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \to x_0$
also x_0 kein lokales Minimum Widerspruch □

Zwischenfazit

Zwei Möglichkeiten für zulässige Menge M:

1. M beschränkt:
   $M = \emptyset$ oder ein Extrempunkt von M ist optimal
2. M unbeschränkt:
   $Z \to -\infty$ oder ein Extrempunkt von M ist optimal

mögliches Vorgehen:

Für alle Wahlen von n Hyperebenen
 Teste die Hyperebenen auf lineare Unabhängigkeit.
 Teste bei lin. unabh. Hyperebenen auf Zulässigkeit des Schnittpunkts.
 Falls zulässig, berechne Z in diesem Schnittpunkt

Test ob $Z \to -\infty$ fehlt.
$\binom{n+m}{n}$ Möglichkeiten $\rightsquigarrow$ viel zu viel

Ein praktikableres Vorgehen

1. Finde zulässigen Extrempunkt x oder entscheide, dass $M = \emptyset$. Wenn ja, STOP.
2. Falls x lokal optimal, x auch global optimal. STOP.
3. Tausche eine der n Hyperebenen so, dass ein neuer, zulässiger Extrempunkt x mit kleinerem Z-Wert gefunden wird. Teste dabei, ob $Z \to -\infty$. Wenn ja, STOP.
4. Weiter bei 2.

Simplex-Methode (Dantzig, 1947)

Simplex konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n + 1$ Extrempunkten

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften

$$Z(x) = -3x_1 - 5x_2 \to \min$$

unter
$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

günstig: alle rechte Seiten nicht negativ
darum 0 zulässiger Extrempunkt mit $Z(0) = 0$

Problem rechnen mit Ungleichungen schwierig
$\rightsquigarrow$ lieber mit Gleichungen formulieren

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften (2)

$$Z(x) = -3x_1 - 5x_2 \to \min$$

$$\text{unter} \quad \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

0 zulässiger Extrempunkt, da alle rechte Seiten nicht negativ

Wie formuliert man in Gleichungen um?

Wir führen dazu

$m = 3$ neue Schlupfvariablen (slack variables) ein:

$$Z \to \min$$

$$\text{unter} \quad Z + 3x_1 + 5x_2 = 0$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & u_1 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & u_3 & = & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften (3)

$$\begin{array}{ll} & Z \to \min \\ \text{unter} & Z + 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ & \begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & u_1 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & u_3 & = & 12 \end{array} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0 \end{array}$$

m Basisvariablen: kommen jeweils genau einmal mit Faktor 1 vor (hier u_1, u_2, u_3)

andere Variablen: Nicht-Basisvariablen (N-BV) (hier x_1, x_2)

Basispunkt $(0, 0, 2, 3, 12)$, Z-Wert 0

zulässiger Basispunkt $\leftrightarrow$ zulässiger Extrempunkt:

„Variable $=$ 0“ entspricht exakte Erfüllung der zugehörigen Ungleichung, sind n Variablen $=$ 0 sind n Ungleichungen exakt erfüllt,

Lösung entspricht Schnitt von n Hyperebenen $\rightarrow$ Extrempunkt

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften (4)

$$
\begin{array}{ll}
 & Z \to \min \\
\text{unter} & Z + 3x_1 + 5x_2 = 0 \\
 & \begin{array}{rcrcrcrcrcl}
 -x_1 & + & x_2 & + & u_1 & & & & & = & 2 \\
 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & 3 \\
 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & u_3 & = & 12
 \end{array} \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0
\end{array}
$$

Basispunkt $(0, 0, 2, 3, 12)$, Z-Wert 0

Schritt Mache eine N-BV positiv, eine BV zur Nicht-BV

Wähle x_2, da Vorfakor in Z größer (greedy).

Wie groß kann x_2 werden? (dabei $x_1 = 0$ fest)

- erste Gleichung: $x_2 \leq 2$
- zweite Gleichung: $x_2 \to \infty$
- dritte Gleichung: $x_2 \leq 4$

gesamt: $x_2 \leq 2$ wegen erster Gleichung; darum $u_1 \rightsquigarrow$ N-BV

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften (5)

$$\begin{array}{ll} & Z \to \min \\ \text{unter} & Z + 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ & \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & u_1 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & u_3 & = & 12 \end{array} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0 \end{array}$$

Schritt: Mache x_2 zur BV, u_1 zur N-BV.

$x_2 = 2 + x_1 - u_1$ aus erster Gleichung

Einsetzen liefert

$$\begin{array}{ll} & Z \to \min \\ \text{unter} & Z + 8x_1 - 5u_1 = -10 \\ & \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & u_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 3u_1 & & & + & u_2 & & & = & 9 \\ 5x_1 & - & 3u_1 & & & & & + & u_3 & = & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0 \end{array}$$

Basispunkt $(0, 2, 0, 9, 6)$ mit Z-Wert -10

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften (6)

$$Z \to \min$$

unter $Z + 8x_1 - 5u_1 = -10$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & u_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 3u_1 & & & + & u_2 & & & = & 9 \\ 5x_1 & - & 3u_1 & & & & & + & u_3 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

Basispunkt $(0, 2, 0, 9, 6)$ mit Z-Wert -10

u_1 größer $\rightsquigarrow$ Z größer

x_1 größer $\rightsquigarrow$ Z kleiner

Schritt Mache x_1 zur N-BV. Wie groß kann x_1 werden?

- erste Gleichung: $x_1 \to \infty$
- zweite Gleichung: $x_1 \to \infty$
- dritte Gleichung: $x_1 \leq 1{,}2$
  hier auch „$x_1 \to \infty$“ $\rightsquigarrow$ $Z \to -\infty$

Ein winziges Beispiel mit günstigen Eigenschaften (7)

$$Z \to \min$$

unter $Z + 8x_1 - 5u_1 = -10$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & u_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & 3u_1 & & & + & u_2 & & & = & 9 \\ 5x_1 & - & 3u_1 & & & & & + & u_3 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

Basispunkt $(0, 2, 0, 9, 6)$ mit Z-Wert -10

Schritt $x_1 \rightsquigarrow$ BV, $u_3 \rightsquigarrow$ N-BV

Einsetzen von $x_1 = 1{,}2 + 0{,}6u_1 - 0{,}2u_3$ liefert

$$Z \to \min$$

unter $Z - 0{,}2u_1 - 1{,}6u_3 = -19{,}6$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 0{,}4u_1 & + & 0{,}2u_3 & + & x_2 & & & & & = & 3{,}2 \\ 2{,}4u_1 & + & 0{,}2u_3 & & & + & u_2 & & & = & 10{,}2 \\ -0{,}6u_1 & + & 0{,}2u_3 & & & & & + & x_1 & = & 1{,}2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

mit Basispunkt $(1{,}2/3{,}2/0/10{,}2/0)$ mit Z-Wert $-19{,}6$

Weil $u_1 \geq 0$ und $u_3 \geq 0$, **optimal**.

Ein weiteres Beispiel

$$Z(x) = -5x_1 - 2x_2 \to \min$$

unter
$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -6 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

nach Umformulierung

$$Z \to \min$$

unter
$$Z + 5x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & - & x_2 & + & u_1 & & & & & = & -3 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & -6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_3 & = & 4 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

Basispunkt $(0, 0, -3, -6, 4)$ unzulässig

Was tun? Basiswechsel in der Hoffnung auf zulässigen Basispunkt

Ein weiteres Beispiel (2)

$$Z \to \min$$

unter $Z + 5x_1 + 2x_2 = 0$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & - & x_2 & + & u_1 & & & & & = & -3 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & -6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_3 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

$u_3 = 4 \geq 0 \rightsquigarrow$ dritte Ungleichung $\checkmark$

zweite Ungleichung $x_1 = x_2 = 0, u_2 = -6$ unzulässig

erste Ungleichung $x_1 = x_2 = 0, u_1 = -3$ unzulässig

Beobachtung Wären alle Koeffizienten positiv,
wäre Gleichung nicht erfüllbar.
$\rightsquigarrow$ Nachweis $M = \emptyset$

Entscheidung x_1 soll Basis betreten (größter Koeffizient in Z)

Welche BV verlässt die Basis dafür?

Ein weiteres Beispiel (3)

$$Z \to \min$$

unter $$Z + 5x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & - & x_2 & + & u_1 & & & & & = & -3 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & -6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_3 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

x_1 betritt Basis. Wer verlässt Basis?

Ausprobieren u_2 $\quad x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}u_2$

Einsetzen in dritte Gleichung

$-2x_2 + u_2 + u_3 = -2$ keine gute Form

Ausprobieren u_3 $\quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}u_3 + 2$

Einsetzen in zweite Gleichung

$-2x_2 + u_2 + u_3 = -2$ keine gute Form

Ausprobieren u_1 $\quad x_1 = -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}u_1 + 1$

Einsetzen in zweite Gleichung

$-\frac{7}{3}x_2 - \frac{2}{3}u_1 + u_2 = -4$ keine gute Form

Ein weiteres Beispiel (4)

$$Z \to \min$$

unter

$$Z + 5x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -3x_1 & - & x_2 & + & u_1 & & & & & = & -3 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & -6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_3 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

x_1 betritt Basis. Wir finden keine gute N-BV.

Später werden wir begründen
Betrachte Quotienten von rechter Seite und Koeffizienten der neuen N-BV in den Gleichungen, die nicht oberhalb der untersten Gleichung mit negativer rechter Seite stehen.
Wähle N-BV aus der Gleichung mit kleinstem positiven Quotienten.

$\frac{-6}{-2} = 3 \qquad \frac{4}{2} = 2$

Darum x_1 betritt Basis, u_3 verlässt die Basis.

Ein weiteres Beispiel (5)

$$Z \to \min$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & & Z + 5x_1 + 2x_2 = 0 & & & & & \\ -3x_1 & - & x_2 & + & u_1 & & & & & = & -3 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & & & + & u_2 & & & = & -6 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & + & u_3 & = & 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

x_1 betritt Basis, u_3 verlässt die Basis.

$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}u_3 + 2$ (wie gehabt)

Einsetzen liefert

$$Z \to \min$$

unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & & & Z - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}u_3 = -10 & & & & & \\ \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}u_3 & + & u_1 & & & & & = & 3 \\ -2x_2 & + & u_3 & & & + & u_2 & & & = & -2 \\ \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}u_3 & & & & & + & x_1 & = & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

Basispunkt $(2, 0, 3, -2, 0)$ unzulässig

Ein weiteres Beispiel (6)

$$Z \to \min$$

unter

$$Z - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{5}{2}u_3 = -10$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\frac{1}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}u_3 & + & u_1 & & & & & = & 3 \\
-2x_2 & + & u_3 & & & + & u_2 & & & = & -2 \\
\frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}u_3 & & & & & + & x_1 & = & 2
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

nur zweite Gleichung schlecht, nur x_2 mit negativem Koeffizienten

$\rightsquigarrow$ x_2 betritt die Basis

Welche BV verlässt die Basis?

Quotientenvergleich $\frac{-2}{-2} = 1 < \frac{2}{1/2} = 4$

also u_2 verlässt die Basis

Ein weiteres Beispiel (7)

$$Z \rightarrow \min$$

unter

$$Z - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}u_3 = -10$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{3}{2}u_3 & + & u_1 & & & & & & & = & 3 \\ -2x_2 & + & u_3 & & & + & u_2 & & & & & = & -2 \\ \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}u_3 & & & & & + & x_1 & & & = & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

x_2 betritt die Basis, u_2 verlässt die Basis

aus 2. Gleichung $x_2 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 + 1$
Einsetzen in Z $Z - \frac{11}{4}u_3 - \frac{1}{4}u_2 = -\frac{19}{2}$
Einsetzen in 1. Gleichung $\frac{7}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_2 + u_1 = \frac{5}{2}$
Einsetzen in 3. Gleichung $\frac{3}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_2 + x_1 = \frac{3}{2}$
aus 2. Gleichung $-\frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_2 + x_2 = 1$

Ein weiteres Beispiel (8)

$$Z \to \min$$

unter

$$Z - \tfrac{11}{4}u_3 - \tfrac{1}{4}u_2 = -\tfrac{19}{2}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\frac{7}{4}u_3 & + & \frac{1}{4}u_2 & + & u_1 & & & & & = & \frac{5}{2} \\
-\frac{1}{2}u_3 & - & \frac{1}{2}u_2 & & & + & x_2 & & & = & 1 \\
\frac{3}{4}u_3 & + & \frac{1}{4}u_2 & & & & & + & x_1 & = & \frac{3}{2}
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

Basispunkt $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$ **zulässig**

Z-Wert $-\frac{19}{2}$

Beobachtung Koeffizienten der N-BV in Z alle < 0
$\rightsquigarrow$ **Lösung optimal**