

Vorlesung

Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie

Sommersemester 2008

Ingo Wegener

Was bisher geschah...

Teil I "Effiziente Algorithmen" ✓

neues Thema **Approximation**

Klassen von Approximationsproblemen

- \mathcal{PO} zugehöriges Entscheidungsproblem in P
- \mathcal{FPTAS} echt polynmielles Approximationsschema
- \mathcal{PTAS} polynmielles Approximationsschema
- \mathcal{APX} c -Approximation (c konstant)
- \mathcal{NPO} zugehöriges Entscheidungsproblem in NP

Fakt $P \neq NP \Rightarrow \mathcal{PO} \subsetneq \mathcal{FPTAS} \subsetneq \mathcal{PTAS} \subsetneq \mathcal{APX} \subsetneq \mathcal{NPO}$

Wir haben (für $P \neq NP$)

- Flussproblem $\in \mathcal{PO}$
- KP $\in \mathcal{FPTAS} \setminus \mathcal{PO}$
- metrisches TSP $\in \mathcal{APX} \setminus \mathcal{PTAS}$
- TSP $\in \mathcal{NPO} \setminus \mathcal{APX}$

fehlt noch Beispiel $\in \mathcal{PTAS} \setminus \mathcal{FPTAS}$

Das euklidische TSP

Eingabe n Punkte $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$
Distanzen $d_{i,j}$ implizit gegeben durch
$$d_{i,j} := \sqrt{(x_i[1] - x_j[1])^2 + (x_i[2] - x_j[2])^2}$$

Vorsicht reelle Zahlen

Anmerkung im Kontext der Approximation nicht so kritisch

Ziel PTAS für das euklidische TSP

vorab

- etwas länglich und nicht ganz einfach
- im Kern **dynamische Programmierung**
- Diskretisierung
- keine Problematisierung „reelle Zahlen“
- Konzept zur Worst-Case-Vermeidung **Randomisierung**

Der Algorithmus von Arora

- ① Diskretisiere und normiere die Eingabe.
- ② Wähle randomisiert eine Zerlegung in Teilprobleme.
- ③ Berechne eine optimale Lösung aller Teilprobleme mit dynamischer Programmierung.
- ④ Gib eine aus dieser Lösung abgeleitete Tour aus.

Eigenschaften

- für $\varepsilon > 0$ Laufzeit $O\left(n(\log n)^{\varepsilon^{-1}}\right)$
- Ausgabe ist $(1 + \varepsilon)$ -Approximation mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1/2$

Ist das ein hilfreicher Algorithmus?

klar **kein** Approximationsschema
aber mit Probability Amplification sicher **hilfreich**

hier Ausbau zu deterministischem Algorithmus (**PTAS**)

Diskretisierung

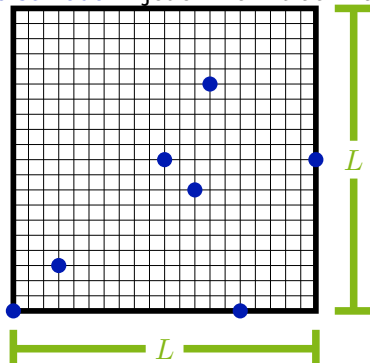
Eingabe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$

Betrachte kleinstes achsenparalleles umschließendes Quadrat
 Seitenlänge L

Verschiebe linke untere Ecke in Koordinatenursprung

Betrachte Gitter mit Abstand $(\varepsilon L)/(8n)$

Verschiebe jeden Punkt auf nächsten Gitterpunkt



Über die Diskretisierung

Eingabe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$

- **Betrachte** kleinstes achsenparalleles umschließendes Quadrat (Seitenlänge L)
- **Verschiebe** linke untere Ecke in Koordinatenursprung
- **Betrachte** Gitter mit Abstand $(\varepsilon L)/(8n)$
- **Verschiebe** jeden Punkt auf nächsten Gitterpunkt

Beobachtung verlängert Wege um $\leq 2(\varepsilon L)/(8n)$ je Punkt

Gesamtlängerung $\leq n \cdot 2(\varepsilon L)/(8n) = (\varepsilon/4) \cdot L$

Beobachtung $\text{OPT} \geq L$

also Gesamtverlängerung $\leq (\varepsilon/4) \cdot \text{OPT}$

also **unproblematisch**, durch $\varepsilon \rightsquigarrow (3/4)\varepsilon$ ausgleichbar

denn $(1 + (3/4)\varepsilon)$ -Approximation + Verlängerung durch Verschiebung
 $= (1 + \varepsilon)$ -Approximation

Normierung

Beobachtung nach Verschiebung alle neuen Punkte
Koordinaten $(i \cdot (\varepsilon L)/(8n), j \cdot (\varepsilon L)/(8n))$
mit $i, j \in \{0, 1, \dots, \lfloor 8n/\varepsilon \rfloor\}$

Normierung Division alle Koordinaten durch $(\varepsilon L)/(64n)$

danach

- alle Koordinaten ganzzahlig
- kleinste Abstände ≥ 8
- neue Länge des umschließenden Quadrates $L = O(n)$
- bis jetzt benutztes Gitter vergessen

Zerlegung in kleinere Probleme

Annahme $L = 2^l$ mit $l \in \mathbb{N}$ (harmlos)

Teile Quadrat in vier Quadrate gleicher Größe

Identifiziere Quadrat mit Knoten
neue Teilquadrate als Kinder

Iteriere bis Quadrate Seitenlänge 1 haben

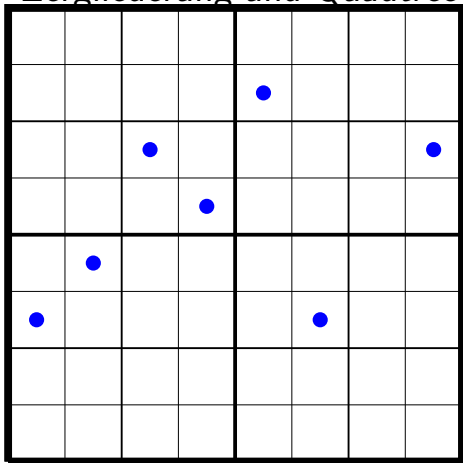
klar kleinste Quadrate entweder leer oder mit einem x_i

klar Baum mit Tiefe $\log L$ und Größe L^2

Anmerkung Ergebnis nennen wir **Zergliederung**

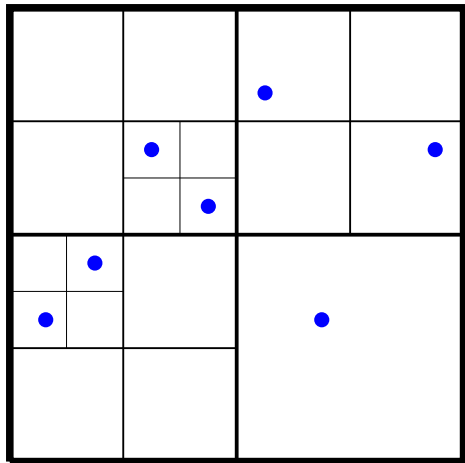
adaptiv ähnlich, aber **effizienter**
Quadtree

Zergliederung und Quadtree



Zergliederung

zergliedere bis Größe 1 (≤ 1 Punkt)
 interpretiere als 4-ärer Baum
 Größe $O(L^2)$, Tiefe $O(\log L)$



Quadtree

kann weniger Knoten haben
 $O(n)$ Blätter, Tiefe $O(\log L)$
 $O(n \log L)$ Knoten

Auf dem Weg zu diskreten Teilproblemen

Idee Benutze Knoten im Quadtree als Teilprobleme.
Löse bottom-up.

Problem Probleme von Punktpositionen
in Nachbarquadraten **abhängig**

Idee entkopple Teilprobleme von konkreter Punktlage
durch Definition **fester Portale**

Problem Verteilung der Punkte x_i bezüglich Quadtree
kann sehr ungünstig sein \rightsquigarrow Worst Case

Idee Randomisierung
verschiebe Quadtree zufällig

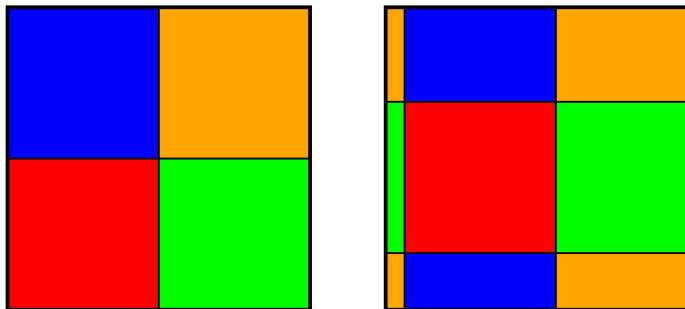
Wappnen gegen Worst Case Eingaben

$a, b \in \{0, 1, 2, \dots, L - 1\}$ zufällig wählen

(a, b) -Verschiebung einer Zergliederung:

Verschiebe $(x, y) \rightsquigarrow ((x + a) \bmod L, (y + b) \bmod L)$.

TSP-Punkte nicht verschieben!



(a, b) -Verschiebung eines Quadtrees
aus (a, b) -Verschiebung der Zergliederung

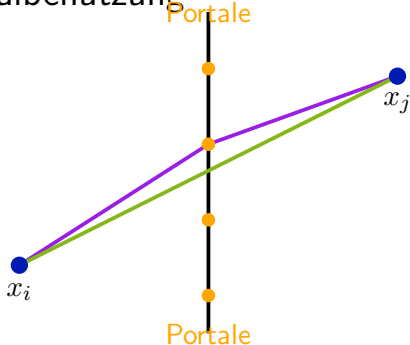
Teilprobleme für dynamische Programmierung

Annahme keine Punkte x_i auf Linien
sonst Skalierung mit Faktor 2 (**harmlos**)

Definition 9.7

Betrachte eine wie beschrieben modifizierte euklidische TSP-Instanz mit Eingabepunkten x_1, x_2, \dots, x_n , ein (a, b) -verschobener Quadtree dazu und zwei Zahlen $m, r \in \mathbb{N}$. Eine m -reguläre Menge von Portalen ist eine Menge von Punkten, so dass auf jeder Ecke eines Quadrats und m weitere Punkte auf jeder Kante eines Quadrats äquidistant verteilt sind. Ein TSP-Pfad besucht jeden Eingabepunkt x_1, x_2, \dots, x_n und kreuzt Quadrate ausschließlich an Portalen, dabei dürfen Portale auch mehrfach benutzt werden. Ein TSP-Pfad heißt (m, r) -leicht für den (a, b) -verschobenen Quadtree, wenn jede Kante jedes Quadrats höchstens r Mal gekreuzt wird.

Portalbenutzung



durch Portalbenutzung gebogener Pfad

Sprachregelung „gebogene“ TSP-Tour, die nur Portale benutzt, heißt TSP-Pfad

Beobachtung $|\text{TSP-Pfad}| \geq |\text{TSP-Tour}|$

Vorgehen Berechne TSP-Pfad. Gib TSP-Tour aus.

Approximationsgüte für TSP-Pfad nachweisen

Das Strukturtheorem

Sind so überhaupt ausreichend gute Touren möglich?

Theorem 9.8 (Strukturtheorem)

Sei $\varepsilon > 0$ konstant, sei eine euklidische TSP-Instanz x_1, x_2, \dots, x_n so gegeben, dass alle Punkte ganzzahlige Koordinaten haben und der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten δ ist, sei L die Seitenlänge des kleinsten einschließenden Quadrats, sei OPT die Länge einer optimalen Tour zu dieser Instanz, seien $a, b \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$ zufällig gemäß Gleichverteilung gewählt. Es gibt $m = O(\varepsilon^{-1} \log L)$ und $r = O(\varepsilon^{-1})$, so dass es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$ einen für die (a, b) -Verschiebung (m, r) -leichten TSP-Pfad mit Länge $\leq (1 + \varepsilon)OPT$ gibt.

Beweis später

jetzt Anwendung

Der Algorithmus von Arora

- ① Diskretisiere und normiere die Eingabe. *wie gesehen* ✓
- ② Wähle zufällig $a, b \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$. ✓
- ③ Berechne (a, b) -verschobenen Quadtree. *wie gesehen* ✓
- ④ Wähle m und r . *geeignete Werte aus Beweis des Strukturtheorems – später*
- ⑤ Berechne optimalen (m, r) -leichten TSP-Pfad mit dynamischer Programmierung. *als nächstes*
- ⑥ Gib entsprechende TSP-Tour aus. ✓

laut **Strukturtheorem** mit W'keit $\geq 1/2$ $(1 + \varepsilon)$ -Approximation

Ein Ansatz zur dynamischen Programmierung

zunächst zum besseren Verständnis **top-down**

klar später tatsächlich **bottom-up** lösen

Betrachte Quadrat $\hat{=}$ Knoten Q mit mehreren Punkten

Beobachtung optimaler (m, r) -leichter TSP-Pfad P für Q
kreuzt Seiten von Q genau $2p \leq 4r$ Mal

Sprachregelung P benutzt Portale a_1, a_2, \dots, a_{2p}
in dieser Reihenfolge

dadurch P zerfällt in Teilpfade P_1, P_2, \dots, P_r
 P_i verbindet a_{2i-1} mit a_{2i}

weil P (m, r) -leichter TSP-Pfad für Q

- P_1, P_2, \dots, P_{2r} zusammen (m, r) -leicht
- P_1, P_2, \dots, P_{2r} besuchen zusammen alle Punkte in Q

Beobachtung P optimal $\Leftrightarrow P_1, P_2, \dots, P_{2r}$ optimal

Art und Anzahl der Teilprobleme

für nicht-leeres Quadrat im (a, b) -verschobenen Quadtree

- für jede Seite von Q Multimenge von $\leq r$ Portalen
- insgesamt $2p \leq 4r$ Portale
- Paarung der Portale $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2p-1}, a_{2p})$

Wieviele Teilprobleme sind das für Q ?

- $(m + 4)^{4r}$ Möglichkeiten, Portale auszuwählen
- $(4r)!$ Möglichkeiten, Portale zu paaren

zusammen $(m + 4)^{4r} \cdot (4r)!$ Teilprobleme

Lösen eines Teilproblems Q

Voraussetzung $\leq 4r$ Portale festgelegt

1. Fall Q ist Blatt

1. Unterfall Q enthält keinen Punkt

dann Pfade durch Portale eindeutig festgelegt

2. Unterfall Q enthält einen Punkt

Beobachtung bei $\leq 2r$ Pfaden $\leq 2r$ Möglichkeiten,
 Punkt in einem Pfad unterzubringen

also in jedem Fall Zeit $O(r)$ für optimale Lösung

Lösen eines Teilproblems Q

Voraussetzung $\leq 4r$ Portale festgelegt

2. Fall Q ist **kein** Blatt

dann Q hat Kinder Q_1, Q_2, Q_3, Q_4
Teilprobleme dort schon optimal gelöst

Wie kreuzt (m, r) -leichter Pfad für Q Kanten von Q_1, \dots, Q_4 ?

Wahl der Portale $(m + 4)^{4r}$ Möglichkeiten

Zuordnung der Portale zu Pfaden $(4r)^{4r}$ Möglichkeiten

Paarung der Portale $(4r)!$ Möglichkeiten

für jedes Teilproblem optimale Kosten ablesen und Summe bilden

gesamt Kombination mit minimaler Kostensumme ist Lösung

Gesamtrechenaufwand $O((m + 4)^{8r} \cdot (4r)^{4r} \cdot ((4r)!)^2)$

Gesamtrechenaufwand

Erinnerung

- Zeit $O(r)$ für Blatt
- Zeit $O((m+4)^{8r} \cdot (4r)^{4r} \cdot ((4r)!)^2)$ für inneren Knoten

Erinnerung $m = O((\log L)/\varepsilon)$, $r = O(1/\varepsilon)$
aus dem Strukturtheorem

also Zeit je Knoten

$$O\left(O((\log L)/\varepsilon)^{O(1/\varepsilon)} \cdot O(1/\varepsilon)^{O(1/\varepsilon)} \cdot (O(1/\varepsilon)!)^2\right)$$

$$= O\left((\log n)^{O(\varepsilon^{-1})}\right)$$

Erinnerung

- Quadtree Tiefe $O(\log L) = O(\log n)$
- Quadtree Blätter $O(n)$
- Quadtree Größe $O(n \log n)$

zusammen Gesamtrechenzeit $O\left(n(\log n)^{O(\varepsilon^{-1})}\right)$

Rechenzeit und PTAS

Wir haben Rechenzeit $O\left(n(\log n)^{O(\varepsilon^{-1})}\right)$

dann $(1 + \varepsilon)$ -Approximation mit W'keit $\geq 1/2$
aus **Strukturtheorem**

Wie erkennen wir, ob Approximationsgüte erreicht?

leider **gar nicht**

später deterministisches PTAS

Zur Approximationsgüte

Erinnerung Approximationsgüte bisher **nur versprochen**
Strukturtheorem **noch unbewiesen**

jetzt auf dem Weg zum Beweis des Strukturtheorems

Erinnerung **zentral** (m, r) -leichte Pfade

Erinnerung Anzahl Schnittpunkte $\leq 4r = O(1/\varepsilon)$

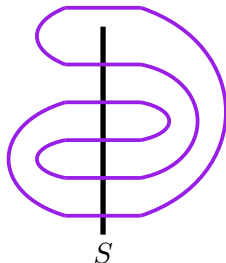
also gute Vorbereitung auf Strukturtheorem
Technik zur Reduzierung der Schnittpunkte
Patchinglemma

Das Patchinglemma

Lemma 9.9 (Patchinglemma)

Sei S ein Liniensegment der Länge s , sei P ein geschlossener Pfad, der S mindestens drei Mal schneidet.

Es gibt einen geschlossenen Pfad P' , der S höchstens zwei Mal schneidet und als Erweiterung von P durch einige Linienabschnitte von S beschrieben werden kann, wobei die Gesamtlängen der Linienabschnitte von S durch $2s$ nach oben beschränkt ist.



Beweis des Patchinglemmas

Betrachte Pfad P und Schnittpunkte M_1, M_2, \dots, M_t ($t \geq 3$)

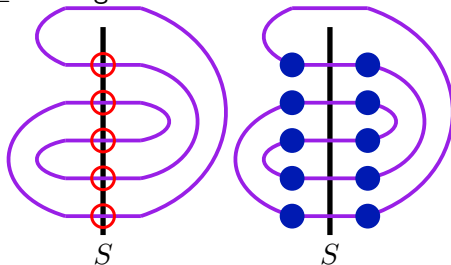
Modelliere durch Graph G mit M'_i, M''_i für M_i

Beobachtungen

- G zusammenhängend mit Eulerkreis
- G hat t Schnittpunkte mit S

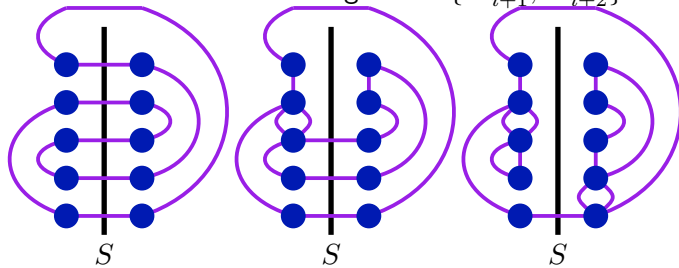
Idee Modifiziere G schrittweise so, dass

- G zusammenhängend mit Eulerkreis bleibt
- G nur noch ≤ 2 Schnittpunkte mit S hat
- G nur um $\leq 2s$ länger wird



Modifikation von G

1. Für alle $i \in \{1, 3, 5, \dots, 2 \lceil t/2 \rceil - 3\}$
2. Entferne $\{M'_i, M''_i\}$.
3. Entferne $\{M'_{i+1}, M''_{i+1}\}$.
4. Füge $\{M'_i, M'_{i+1}\}$ ein.
5. Füge $\{M''_i, M''_{i+1}\}$ ein.
6. If G nicht zusammenhängend
Then Mache G zusammenhängend
Entweder durch Einfügen von $\{M'_{i+1}, M'_{i+2}\}$ und $\{M'_{i+1}, M'_{i+2}\}$
Oder durch Einfügen von $\{M''_{i+1}, M''_{i+2}\}$ und $\{M''_{i+1}, M''_{i+2}\}$.



Beobachtungen zur Modifikation von G

zu Schnittpunkten

- für jedes ungerade $i \leq 2 \lceil t/2 \rceil - 3$ Schnittpunkte M_i, M_{i+1} entfernt
- also höchstens Schnittpunkte M_{t-1} und M_t übrig
- also Anzahl Schnittpunkte nachher ≤ 2

zum Knotengrad

- alle Knotengrade bleiben gerade
- also weiterhin Eulerkreis, **falls** zusammenhängend

offen **Bleibt Zusammenhang garantiert erhalten?**

Über den Zusammenhang von G

- Zeile 2 erhält Zusammenhang, weil Eulerkreis vorhanden
- nach Zeile 5 Zusammenhang vielleicht verloren
- aus zusammenhängendem Graph nur 1 Kante entfernt, also ≤ 2 Zusammenhangskomponenten

kritisch $Z(M'_{i+1}) \neq Z(M''_{i+1})$

Betrachte $Z(M'_{i+2})$ und $Z(M''_{i+2})$
 weil $i \leq 2 \lceil t/2 \rceil - 3$ ist $i + 2 \leq t$

1. Fall $Z(M'_{i+1}) = Z(M'_{i+2})$ und $Z(M''_{i+1}) = Z(M''_{i+2})$

dann $\exists \{M'_{i+2}, M''_{i+2}\}$, also $M'_{i+1} \rightsquigarrow M'_{i+2} \rightarrow M''_{i+2} \rightsquigarrow M''_{i+1}$
Widerspruch

2. Fall $Z(M'_{i+1}) \neq Z(M'_{i+2})$ oder $Z(M''_{i+1}) \neq Z(M''_{i+2})$

dann neue Doppelkante verringert #ZHK um 1

also G am Ende jeder Runde zusammenhängend ✓

Zur Länge der eingefügten Teile

Beobachtung Zeilen 4, 5 fügen $\{M'_i, M'_{i+1}\}, \{M''_i, M''_{i+1}\}$ ein
entspricht doppeltem Einfügen von $M_i \leftrightarrow M_{i+1}$
für ungerades i

Beobachtung Zeile 6 fügt $\{M'_{i+1}, M'_{i+2}\}$ doppelt ein
oder $\{M'_{i+1}, M'_{i+2}\}$ doppelt ein
entspricht doppeltem Einfügen von $M_{i+1} \leftrightarrow M_{i+2}$
für ungerades i

also insgesamt S höchstens doppelt eingefügt



Noch ein Schritt zum Beweis des Strukturtheorems

zum Beweis des Strukturtheorems amortisierte Analyse
mit Kostenverteilung an Gitterlinien
für jedes benutzte Portal

darum nützlich Aussage über #Schnittpunkte Tour, Gitterlinie

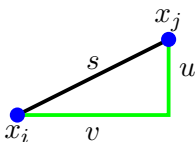
Lemma 9.10

Sei eine TSP-Instanz so gegeben, dass alle Punkte ganzzahlige Koordinaten haben und der minimale Abstand zwischen zwei Punkten vier beträgt. Sei π eine optimale Tour für diese TSP-Instanz mit Länge OPT , sei g eine Gitterlinie des Einheitsgitters, gebe $\tau(\pi, g)$ die Anzahl der Schnittpunkte zwischen π und g an.

$$\sum_{g \text{ vertikal}} \tau(\pi, g) + \sum_{g \text{ horizontal}} \tau(\pi, g) \leq 2OPT$$

Tourlänge und Schnittpunkte

Betrachte Betrachte Kante e aus π mit Länge s und ihre Projektionen mit Längen u und v .



Beobachtung #Schnitte e mit Gitterlinien
 $\leq (u + 1) + (v + 1) = u + v + 2$

Beobachtung $(u - v)^2 \geq 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \geq 2uv$
 $\Leftrightarrow 2(u^2 + v^2) \geq (u + v)^2$
 $\Leftrightarrow u + v \leq \sqrt{2(u^2 + v^2)} = \sqrt{2s^2}$

Von der Kante zur Tour

Wir haben $\#$ Schnitt e mit Gitterlinien
 $\leq \sqrt{2}s + 2 \leq 2s$
 weil $s \geq 4$

also für jede Kante $e \in \pi$
 $\#$ Schnitte mit Gitterlinien $\leq 2|e|$

also summiert über alle Kanten $\leq 2OPT$

klar summiert über alle Gitterlinien unverändert



Jetzt endlich. . .

Theorem 9.8 (Strukturtheorem)

Sei $\varepsilon > 0$ konstant, sei eine euklidische TSP-Instanz x_1, x_2, \dots, x_n so gegeben, dass alle Punkte ganzzahlige Koordinaten haben und der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten δ ist, sei L die Seitenlänge des kleinsten einschließenden Quadrats, sei OPT die Länge einer optimalen Tour zu dieser Instanz, seien $a, b \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$ zufällig gemäß Gleichverteilung gewählt. Es gibt $m = O(\varepsilon^{-1} \log L)$ und $r = O(\varepsilon^{-1})$, so dass es mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$ einen für die (a, b) -Verschiebung (m, r) -leichten TSP-Pfad mit Länge $\leq (1 + \varepsilon)\text{OPT}$ gibt.

Beweisstrategie.

- 1 Starte mit optimaler Tour π .
- 2 Transformiere schrittweise in (m, r) -leichten Pfad.
- 3 Amortisierte Analyse des Längenzuwachses.

Erste Beweisschritte

- Erinnerung** Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
 nur über zufällige Wahl von a, b
- Annahme** Länge des umschließenden Quadrats $L = 2^l, l \in \mathbb{N}$
 (**harmlos**)
- Betrachte** (a, b) -verschobene Zergliederung bis „ganz unten“
 Tiefe $\log L = l$
- Definiere** **Level** eines Quadrats/Knotens im Baum
 Wurzel auf Level 0

Level von Gitterlinien

Beobachtung Gitterlinie g gehört zu vielen Leveln

Definiere **max. Level** von $g = \min\{i \mid g \text{ gehört zu Level } i\}$

Beobachtung Gitterlinie auf Level i hat Länge $L/2^i$

Beobachtung Koordinaten von Gitterlinien

$(a + p \cdot L/2^i) \bmod L$ mit $p \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\}$
für vertikale Gitterlinien

$(b + p \cdot L/2^i) \bmod L$ mit $p \in \{0, 1, \dots, 2^i - 1\}$
für horizontale Gitterlinien

Beobachtung $\text{Prob}(\text{max. Level von } g = i) = \begin{cases} \frac{2^{i-1}}{L} & \text{falls } i \geq 1 \\ \frac{1}{L} & \text{falls } i = 0 \end{cases}$

Modifikation von π

Definiere $s := \lceil 16/\varepsilon \rceil$, $r := s + 4$, $m := 2s \log L$

zentral Prozedur $\text{Modify}(g, i, b)$
für vertikale Gitterlinie g mit max. Level i bei Verschiebung b

Ziel Veränderung von π so, dass Ergebnis (m, r) -leicht ist

Methode Patchinglemma

klar für horizontale Gitterlinien ganz analog

Modify(g, i, b)

für vertikale Gitterlinie g mit max. Level i bei Verschiebung b

1. Für alle $j \in \{l, l-1, \dots, i\}$ $\{ * l = \log L * \}$
2. Für alle $p \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}$
3. If π und l haben zwischen $(b + p \cdot \frac{L}{2^j}) \bmod L$
und $(b + (p+1) \cdot \frac{L}{2^j}) \bmod L$ mehr als s Schnittpunkte
4. Then Verkleinere die Anzahl der Schnittpunkte auf ≤ 4 .

Wieso ≤ 4 ? – Patchinglemma erlaubt doch ≤ 2 ?

Erinnerung Quadrate können geteilt sein
getrennt in den Teilen

Beobachtung entstehender TSP-Pfad (m, r) -leicht ✓

offen Wird der Pfad nicht zu lang?

Länge des TSP-Pfades

Idee amortisierte Analyse mit Kostenverteilung
Umlegen der Kosten auf Gitterlinien

Betrachte Gitterlinie g mit max. Level > 0

Bezeichne $c_{g,j}(b)$ Anzahl der Abschnitte von g
mit Anwendung des Patchinglemmas auf Ebene j

anfangs $\tau(\pi, g)$ Schnitte (Notation aus Lemma 9.10)

Beobachtung je Anwendung Patchinglemma
Verkleinerung von $\geq s + 1$ auf ≤ 4 (Differenz $\geq s - 3$)

also
$$\sum_{j=i}^{\log L} c_{g,j}(b) \leq \frac{\tau(\pi, g)}{s-3}$$

Abschätzung der Kostenzunahme

Erinnerung Vergrößerung durch Patchinglemma
 $\leq 2s$ bei Segmentlänge s

also Kostenzunahme $\leq \sum_{j=i}^{\log L} c_{g,j}(b) \cdot 2 \cdot \frac{L}{2^j}$

also E (Gesamtkostenzunahme für g)

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{\log L} \text{Prob}(g \text{ hat max. Level } i) \cdot \text{Kostenz. für } g \text{ mit max. Level } i \\
 &= \sum_{i=1}^{\log L} \frac{2^{i-1}}{L} \cdot \sum_{j=i}^{\log L} c_{g,j}(b) \cdot 2 \cdot \frac{L}{2^j} = \sum_{i=1}^{\log L} \sum_{j=i}^{\log L} 2^i \cdot \frac{c_{g,j}(b)}{2^j} \\
 &= \sum_{j=1}^{\log L} \sum_{i=1}^j 2^i \cdot \frac{c_{g,j}(b)}{2^j} = \sum_{j=1}^{\log L} \frac{c_{g,j}(b)}{2^j} \cdot \sum_{i=1}^j 2^i \\
 &= \sum_{j=1}^{\log L} \frac{c_{g,j}(b)}{2^j} \cdot (2^{j+1} - 2) \leq \sum_{j=1}^{\log L} 2c_{g,j}(b) \leq 2 \cdot \frac{\tau(\pi, g)}{s-3}
 \end{aligned}$$

Mehrkosten durch Portalbenutzung

Erinnerung je Quadratseite m gleichmäßig verteilte Portale

also auf Level i Kostenzunahme $\leq 2 \cdot \frac{L}{2^{i \cdot m}}$

also E (Kostenzunahme durch Portalbenutzung für g)

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{\log L} \text{Prob}(g \text{ hat max. Level } i) \cdot \text{Kostenz. für } g \text{ mit max. Level } i \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\log L} \frac{2^{i-1}}{L} \cdot \frac{2L}{2^{i \cdot m}} \cdot \tau(\pi, g) \\
 &= \sum_{i=1}^{\log L} \frac{\tau(\pi, g)}{m} = \frac{\tau(\pi, g) \log L}{m} < \frac{\tau(\pi, g)}{s}
 \end{aligned}$$

Erwartete Gesamtkosten

Wir haben erwartete Gesamtkosten je Gitterlinie g

$$\leq 2 \cdot \frac{\tau(\pi, g)}{s-3} + \frac{\tau(\pi, g)}{s} < \frac{4\tau(\pi, g)}{s}$$

$s = \lceil 16/\varepsilon \rceil$, Christofides falls s zu klein

also E (Gesamtmehrkosten)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{g \text{ vertikal}} \frac{4\tau(\pi, g)}{s} + \sum_{g \text{ horizontal}} \frac{4\tau(\pi, g)}{s} \\ &= \frac{4}{s} \cdot \left(\sum_{g \text{ vertikal}} \tau(\pi, g) + \sum_{g \text{ horizontal}} \tau(\pi, g) \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Lemma 9.10}}{\leq} \frac{8\text{OPT}}{s} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \text{OPT}$$

also $\text{Prob}(\text{Gesamtmehrkosten} > 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \text{OPT}) < \frac{1}{2}$

Markov-Ungleichung



Ein PTAS fürs euklidische TSP

Erinnerung unsere PTAS müssen deterministisch sein

Erinnerung Zufall nur Wahl von $a, b \in \{0, 1, \dots, L-1\}$

Beobachtung nur $O(n^2)$ verschiedene Wahlen möglich
weil $L = O(n)$

Idee statt Zufallswahl, alle $O(n^2)$ Möglichkeiten durchprobieren
kürzeste Tour ausgeben

klar Es **muss** passende Wahl geben
weil $\text{Prob}(\text{wähle passend}) \geq 1/2$

klar zusätzlicher Laufzeit**faktor** $\Theta(n^2)$

Zusammenfassung

Theorem 9.11

Der Algorithmus von Arora hat Laufzeit $O\left(n (\log n)^{O(\varepsilon^{-1})}\right)$, er berechnet für jede Instanz des euklidischen TSP in der Ebene mit n Punkten für jedes $\varepsilon > 0$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$ eine $(1 + \varepsilon)$ -Approximation.

Der Algorithmus von Arora ist ein PTAS für das TSP und hat Laufzeit

$$O\left(n^3 (\log n)^{O(\varepsilon^{-1})}\right).$$

Es gilt euklidisches TSP $\in \mathcal{PTAS}$.

Schlussbemerkungen

- $P \neq NP \Rightarrow$ euklidisches TSP $\notin FPTAS$
- verallgemeinerbar auf d -dimensionales euklidisches TSP,
randomisiert Laufzeit $O\left(n(\log n)^{O(\sqrt{d} \cdot \varepsilon^{-1})^{d-1}}\right)$,
deterministisch Laufzeit $O\left(n^{d+1}(\log n)^{O(\sqrt{d} \cdot \varepsilon^{-1})^{d-1}}\right)$
- Algorithmus von Arora nicht praktisch relevant