DAP 2 - Formelsammlung

Hallo liebe DAP 2 - Studis,

diese Formelsammlung soll Euch einen Überblick über die in DAP 2 verwendeten und im weiteren Studium hilfreichen Formeln geben und beim Lernen helfen.

Dabei möchte ich ausdrücklich darauf hinweisen, dass einige Formeln aufgeführt sind, die nicht zum minimalen Lernpensum für die DAP 2 Klausur gehören. Auf der anderen Seite umfasst die Formelsammlung nicht alle in DAP 2 verwendeten Formeln. Das bedeutet insbesondere, dass es nicht genügt diese Sammlung vollständig auswendig zu lernen und auch, dass nicht alle Formeln für die erfolgreiche Bearbeitung der Klausur erforderlich sind, unabhängig davon welche Themen geprüft werden.

Für einen weiteren Überblick über mathematische Methoden, Formeln und dazugehörige Beweise (auch zu den hier aufgeführten Formeln) empfehlen wir das Buch "Concrete Mathematics" von Ronald L. Graham, Donald E. Knuth und Oren Patashnik, erschienen 1994 im Addison-Wesley-Verlag unter der ISBN 0-201-55802-5.

Viel Erfolg beim Lernen für DAP 2 und im weiteren Studium!

Euer DAP 2 - Team

So, und nun zu den Formeln...

Arithmetische Reihen	
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$	Summe aller natürlichen Zahlen bis einschließlich n
$\sum_{i=m}^{n} i = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$	Summe aller natürlichen Zahlen von m bis n, beides einschließlich
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	Summe der ersten n Quadratzahlen
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$	Summe der ersten n Kubikzahlen
Geometrische Reihe	
$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	für $q \neq 1$
$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$	für $\lvert q \rvert < 1$, sonst divergent
Harmonische Reihe	
$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + 0,577 + o(1)$	insbesondere: $\ln(n+1) \leq H(n) \leq \ln n + 1$
Potenzgesetze	analog für Wurzeln
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	
$\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$	
$a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$	
Logarithmengesetze	in der Informatik: $\log n = \log_2 n$, falls nicht anders angegeben!
$\log(n \cdot m) = \log n + \log m$	
$\log(\frac{n}{m}) = \log n - \log m$	
$\log(n^m) = m * \log n$	
$\log_b n = \frac{\log_x n}{\log_x b}$, z.B.: $\log n = \frac{\ln n}{\ln 2}$	Basiswechsel mit beliebiger Basis x (nützlich z.B. für den Taschenrechner, der nur ln und $\log_{10}$ anbietet.)
Mittelwerte	
$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$	arithmetisches Mittel
$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$	geometrisches Mittel
$\tilde{x} = x_{(n+1)/2}$, für n ungerade $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$, für n gerade	Median einer geordneten Menge $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Kombinatorik	(siehe auch Tabelle auf der nächsten Seite)
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$, $0! = 1$	Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge (Fakultät)
$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$	Stirlingsche Näherungsformel
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementiger Menge (Binomialkoeffizient)
Reihen mit Binomialkoeffizienten	
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k} = (a+b)^n$	binomischer Lehrsatz
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$	Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge $\mathbb{M}$, Kardinalität der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\mathcal{O}$-Notation ($f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_0^+$, $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_0^+$)	**Interpretation**
$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$	f wächst asymptotisch nicht schneller als g
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	f wächst asymptotisch langsamer als g
$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$	f wächst asymptotisch nicht langsamer als g
$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$	f wächst asymptotisch schneller als g
$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$	f und g wachsen asymptotisch gleich schnell
Eigenschaften der $\mathcal{O}$-Notation	
$c \cdot f = \mathcal{O}(f)$	für eine Konstante $c \geq 0$
$c \cdot \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f)$	für eine Konstante $c \geq 0$
$\mathcal{O}(f_1) + \ldots + \mathcal{O}(f_k) = \mathcal{O}(f_1 + \ldots + f_k) = \mathcal{O}(\max\{f_1, \ldots, f_k\})$	für konstantes k
$\mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g)$	

(Diskrete) Wahrscheinlichkeitsrechnung	
Allgemeines	$p\hat{=}$Erfolgsw'keit, $q = 1 - p\hat{=}$Misserfolgsw'keit
Ω (Menge aller Elementarereignisse)	Ergebnismenge, z.B.: beim Würfeln $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \subseteq \Omega$	Ereignis, z.B.: $A = \{3, 4\}$ $\hat{=}$ "*Augenzahl* : 3 *oder* 4"
$\lvert A\rvert$	Kardinalität einer Menge $\hat{=}$ Anzahl ihrer Elemente
$Prob(A \cap B) = Prob(A) \cdot Prob(B)$	falls Ereignisse A und B unabhängig
$X : \Omega \mapsto \Omega'$	X ist Zufallsvariable (ZV) und ordnet Elementarereignissen Werte $x_i \in \Omega'$ zu, die die ZV mit W'keit p_i annimmt
$E(X) = \sum\limits_i x_i \cdot Prob(X = x_i)$	Erwartungswert einer ZV, $X : \Omega \mapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n = \infty$ möglich
Gleichverteilung	z.B. faire Münze, fairer Würfel, (Ergebnisse gleichwahrscheinlich)
$Prob(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$ z.B.: $Prob(\text{"}Augenzahl : 3\ oder\ 4\text{"}) = \frac{2}{6}$	$\lvert A\rvert$ $\hat{=}$ Anzahl günstiger Möglichkeiten für ein Ereignis A $\lvert\Omega\rvert$ $\hat{=}$ Anzahl aller Möglichkeiten
$E(X) = \frac{1}{n} \sum\limits_{x=1}^{n} x = \frac{n+1}{2}$	Erwartungswert einer gleichverteilten ZV, $X : \Omega \mapsto \{1, \ldots, n\}$
Geometrische Verteilung	intuitiv: $(k-1)$-mal Misserfolg, dann Erfolg
$Prob(X = k) = q^{k-1} \cdot p$	X ist eine ZV, z.B. die Höhe einer Skipliste
$Prob(X \leq k) = \sum\limits_{i=1}^{k} q^{i-1} \cdot p$ $= p \cdot \sum\limits_{i=1}^{k} q^{i-1} = 1 - q^k$	letzte Umformung: siehe geometrische Reihe
$E(X) = p \cdot \sum\limits_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = \frac{1}{p}$	Erwartungswert einer geometrisch verteilten ZV
Binomialverteilung	intuitiv: bei n Zügen aus einer Urne k Treffer
$Prob(X = k) = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$	
$Prob(X \leq k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} q^{n-i} p^i$	für $k \leq n$
$E(X) = \sum\limits_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} q^{n-x} p^x = n \cdot p$	Erwartungswert einer binomialverteilten ZV

Urnenmodell: Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln

Zusatz zur Kombinatorik	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$