

Lemma: „ODER-Lemma“: Sei p ein Pinup-Polynom für eine Funktion g , die nicht von der Variablen x_i abhängt. Dann ist

a) $x_i \vee p$ ein Pinup-Polynom für $x_i \vee g$.

b) $\bar{x}_i \vee p$ ein Pinup-Polynom für $\bar{x}_i \vee g$.

Beweis: Wir zeigen a), b) wird vollkommen analog bewiesen.

$x_i \vee p$ enthält trivialerweise nur Implikanten von $x_i \vee g$. Bleibt also zu zeigen, dass alle Primimplikanten von

$$h := x_i \vee g$$

im Polynom $x_i \vee p$ vorkommen. Sei also $m \in PI(h)$.

Fall A): m enthält x_i . Da nach Definition von h das Literal x_i selbst Implikant von h ist, muss $m = x_i$ sein. Dieses Monom kommt offensichtlich in $x_i \vee p$ vor.

Fall B): m enthält x_i nicht. Wir zeigen dann, dass m Primimplikant von g ist. Zunächst zeigen wir, dass m Implikant von g ist. Sei also $m(a) = 1$. Bleibt also zu zeigen, dass $g(a) = 1$ ist. Da $m \in PI(h)$, so ist zunächst $h(a) = 1$.

Fallunterscheidung: Falls $a_i = 0$ ist, so ist $h(a) = 0 \vee g(a) = g(a)$, also wegen $h(a) = 1$ auch $g(a) = 1$.

Falls $a_i = 1$ ist, so sei $a^* := (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)$ der Vektor, den man aus a bekommt, indem man die i -te Stelle auf 0 setzt.

Wir beobachten zunächst: Da $m(a) = 1$ ist und $a_i = 1$, so enthält m auch \bar{x}_i nicht.

Damit gilt $m(a^*) = m(a)$, da m überhaupt nicht von x_i abhängt. Also ist $m(a^*) = 1$.

Da $m \in PI(h)$, so folgt $h(a^*) = 1$. Da $h(a^*) = 0 \vee g(a^*) = g(a^*)$, ist auch $g(a^*) = 1$. Da g nicht von x_i abhängt, folgt damit sofort $g(a) = 1$.

Somit ist gezeigt, dass m Implikant von g ist. Bleibt die Primimplikanteneigenschaft zu zeigen:

Da jeder Implikant von g auch Implikant von h ist, kann keine echte Verkürzung von m auch Implikant von g sein. (Denn sonst wäre m kein Primimplikant von h !) Damit ist m Primimplikant von g und kommt somit im Polynom $x_i \vee p$ vor, da ja p Pinup-Polynom für g ist.

„**Warnung**“: Es gilt nicht: $PI(x_i \vee g) = \{x_i\} \cup PI(g)$. Gegenbeispiel: $g = 1$. Dann ist

$$PI(x_i \vee g) = PI(1) = \{1\} \neq \{x_i\} \cup \{1\}.$$

(Es hat schon seinen Grund, dass wir über Pinup-Polynome reden ...)