Folgendes Beispiel zeigt, dass binäre Synthese zu einem „quadratischen Blowup“ führen kann. Übrigens ist mehr als quadratischer Blowup nicht möglich, wie die Produktgraphkonstruktion zeigt.

Satz: Es gibt Funktionen f und g auf $n+\log n = O(n)$ Variablen und eine Variablenordnung π mit folgender Eigenschaft:

- f und g können jeweils in π-OBDDs der Größe $O(n)$ berechnet werden.
- $f \vee g$ hat nur π-OBDDs der Größe $\Omega(n^2)$.

Beweis: Sei oBdA $n = 2^k$ und

$$\begin{aligned} f &:= MUX(x_0,\dots,x_{k-1},z_0,\dots,z_{n-1}) := z_{bin(x)}, \\ g &:= MUX(y_0,\dots,y_{k-1},z_0,\dots,z_{n-1}) := z_{bin(y)}. \end{aligned}$$

MUX ist also die Multiplexerfunktion, die Adressvariablen und Speichervariablen als Inputs bekommt und den Inhalt des adressierten Speicherbits als Output liefert. Wähle als Variablenordnung

$$\pi := x_0,\dots,x_{k-1},y_0,\dots,y_{k-1},z_0,\dots,z_n.$$

Ein OBDD für f (und analog für g) ist einfach zu entwerfen: Wir wählen einen vollständigen Entscheidungsbaum auf den x–Variablen, dann liegen $2^k = n$ Blätter vor. Jedes Blatt gehört zu genau einer adressierten z–Variable. Diese testen wir in dem Blatt und gehen zur 1-Senke oder 0-Senke, je nachdem, welchen Wert die adressierte z-Variable hat. Die Größe dieses OBDDs ist $O(n)$.

Um eine untere Schranke für π-OBDDs für die Funktion $f \vee g$ zu bekommen, benutzen wir den Struktursatz. Wir analysieren, wieviele mit z_i markierte Knoten es gibt. Wir müssen alle Subfunktionen betrachten, die sich ergeben, wenn man die Variablen $x_0,\dots,x_{k-1},y_0,\dots,y_{k-1},z_0,\dots,z_{i-1}$ auf alle möglichen Arten konstant setzt. Da wir eine untere Schranke zeigen wollen, dürfen wir uns bestimmte Konstantsetzungen auswählen.

Wir setzen alle x-Variablen so, dass die z_i-Variable adressiert wird und die y-Variablen so, dass eine Variable z_j mit $j \geq i$ adressiert wird. Die Variablen $z_0,\dots,z_{i-1}$ setzen wir auf 0. Die entstehende Subfunktion ist dann $z_i \vee z_j$, die natürlich essentiell von z_i abhängt. Da es $n-i$ verschiedene $j \geq i$ gibt, sind dies mindestens $n-i$ mit z_i markierte Knoten. Damit gibt es mindestens

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = n^2 - (1/2)\cdot n\cdot(n-1) = \Omega(n^2)$$

viele mit einer z-Variablen markierte Knoten.

Ende des Beweises.

Übrigens: Man hätte auch DQF (siehe früher in der Vorlesung) als Beispiel nehmen können. DQF benötigt (bei der bestimmten Variablenordnung) 2^{n+1} Größe und kann als ODER von zwei DQF-Funktionen auf der Hälfte der Variablen geschrieben werden. Diese haben damit (nur) die Größe $s := 2^{(n/2)+1}$ und 2^{n+1} ist gleich $s^2/2$, der Blowup ist also auch quadratisch.