Methode des Iterierten Konsensus

Wir kommen zu einer weiteren Methode. Während die Methode von Quine McCluskey mit einfachen Konsensi gearbeitet hat, arbeitet diese hier vorgestellte Methode mit einem allgemeineren Konsensusbegriff.

Definition 0.7.9 *Für zwei Monome $m\bar{x}_i$ und $m'x_i$ mit $mm' \neq 0$ heißt mm' Konsensus von $m\bar{x}_i$ und $m'x_i$. Sprechweise: Die beiden Monome bilden den Konsensus mm'.*
Wenn ein Polynom p zwei Monome enthält, die einen Konsensus mm' bilden, dann sagt man „Es existiert der Konsensus mm' auf p“.

Lemma 0.7.10 *Sei p ein Polynom für die Funktion f. Wenn ein Konsensus mm' auf p existiert, dann gilt $f = p \vee mm'$, wir können also den Konsensus zum Polynom hinzufügen ohne die dargestellte Funktion zu verändern.*

Beweis. Wir zeigen „sogar“ $m\bar{x}_i \vee m'x_i = m\bar{x}_i \vee m'x_i \vee mm'$:
Wenn $x_i = 0$ ist, dann steht links m und rechts $m \vee mm' = m \cdot (1 \vee m') = m$.
Wenn $x_i = 1$ ist, dann steht links m' und rechts $m' \vee mm' = m' \cdot (1 \vee m) = m'$. □

Entscheidend für die Methode des Iterierten Konsensus ist nun die folgende Aussage:

Lemma 0.7.11 *Sei p ein Polynom für die Funktion f. Wenn t ein Implikant von f ist, dann gilt mindestens eine der folgenden beiden Aussagen:*

a) t hat eine Verkürzung in p.

b) Es gibt einen Konsensus auf p, der keine Verkürzung in p hat

Beweis. Durch (umgekehrte) Induktion über die Länge von t.
Wenn t ein Minterm ist (Induktionsanfang), dann enthält trivialerweise das Polynom p eine Verkürzung von t, also ist a) wahr.
Wenn t kein Minterm ist, dann gibt es eine Variable x_i, so dass weder x_i noch $\bar{x}_i$ in t vorkommt. Damit sind tx_i und $t\bar{x}_i$ Implikanten von f, auf die wir die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Falls für eine der beiden gilt, dass Aussage b) zutrifft, dann sind wir fertig.
Also nehmen wir an, dass auf tx_i und $t\bar{x}_i$ Aussage a) zutrifft, dass also tx_i und $t\bar{x}_i$ Verkürzungen in p haben, nennen wir sie t_1x_i und $t_2\bar{x}_i$. Dabei sind t_1 und t_2 beide Verkürzungen von t.
Damit existiert auf p ein Konsensus t_1t_2. Dieser ist Verkürzung von t.
Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder dieser Konsensus hat eine Verkürzung in p. Dann ist offensichtlich Aussage a) wahr, denn dann hat auch t eine Verkürzung in p.
Oder dieser Konsensus hat keine Verkürzung in p. Dann ist Aussage b) wahr. □

Damit gilt nun folgende Aussage:

Lemma 0.7.12 *Sei p ein Polynom für f. Wenn für jeden Konsensus mm' auf p eine Verkürzung von mm' in p ist, dann ist p ein Pinup-Polynom für f.*

Beweis. Sei t ein Primimplikant von f. Da nach Voraussetzung dieses Lemmas nie Teil b) des letzten Lemmas erfüllt ist, ist Teil a) erfüllt und somit hat t eine Verkürzung in p. Da t ein Primimplikant ist, ist diese Verkürzung in p gleich t. □

Damit ergibt sich die Methode des Iterierten Konsensus wie folgt:

Input: Ein Polynom p für f.

Vereinfache das Polynom (also: streiche Verlängerungen und Duplikate)
while auf p existiert Konsensus mm', der keine Verkürzung in p hat **do**
  Füge mm' zu p hinzu
  Vereinfache das Polynom
end
Liefere das Polynom zurück

Unsere Lemmata oben haben schon folgendes gezeigt: Wenn der Iterierte Konsensus terminiert, dann enthält das zurück gelieferte Polynom genau alle Primimplikanten.
Der Grund: Wenn der Algorithmus stoppt, dann gibt es für jeden Konsensus auf p eine Verkürzung in p. Damit ist das Polynom ein Pinup-Polynom und durch Vereinfachung bleiben nur noch die Primimplikanten übrig.
Bleibt nur noch zu zeigen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert.
Es gilt folgendes: Wenn ein Monom m zum Polynom hinzugefügt wird, dann enthält das Polynom ab diesem Zeitpunkt stets eine Verkürzung von m (denn m kann nur durch Vereinfachen des Polynoms wieder herausfallen). Damit kann aber m kein zweites Mal zum Polynom hinzugefügt werden, da wir nur Monome hinzufügen, die keine Verkürzung im Polynom haben. Also gilt: Jedes Monom wird maximal einmal hinzugefügt, andererseits gibt es höchstens 3^n Monome auf n Variablen, also endlich viele. Damit terminiert der Algorithmus nach endlich vielen Schritten.

Corollary 0.7.13 *Wenn ein Polynom p vorliegt, auf dem es keinen Konsensus gibt, dann ist p Pinup-Polynom.*

Beispiel: Wenn ein Polynom vorliegt, das nur positive Monome enthält, dann ist es Pinup-Polynom für die dargestellte Funktion. (Denn wenn alle vorkommenden Literale positiv sind, gibt es keinen Konsensus und es greift das Korollar). Damit brauchen wir bei solch einem Monom nur noch zu vereinfachen.
Beispiel: Wenn $f = x_1x_2x_5 \vee x_1x_5x_8 \vee x_1x_2$ ist, ergibt Vereinfachung das Polynom $x_1x_5x_8 \vee x_1x_2$, damit ist $PI(f) = \{x_1x_5x_8, x_1x_2\}$.