

## 1.4 Conditional Sum Addierer

Gegeben sind Inputs  $x = (x_{n-1}, \dots, x_0)$  und  $(y_{n-1}, \dots, y_0)$ .

$Z_1^{(n)}(x, y)$  soll die Binärdarstellung von  $\text{bin}(x) + \text{bin}(y) + 1$  sein und

$Z_0^{(n)}(x, y)$  soll die Binärdarstellung von  $\text{bin}(x) + \text{bin}(y) + 0$  sein.

Diese umfassen jeweils  $n + 1$  Bits.

**SUM**( $x, y$ ) soll einen Schaltkreis beschreiben, in dem sowohl  $Z_1^{(n)}(x, y)$  als auch  $Z_0^{(n)}(x, y)$  berechnet werden. Wir entwerfen den Schaltkreis rekursiv:

**SUM** ( $x, y$ )

**begin** Zerlege  $x$  und  $y$  in vordere und hintere Hälfte:

$$x_{hi} := (x_{n-1}, \dots, x_{n/2}) \text{ sowie } x_{lo} := (x_{n/2-1}, \dots, x_0),$$

$$y_{hi} := (y_{n-1}, \dots, y_{n/2}) \text{ sowie } y_{lo} := (y_{n/2-1}, \dots, y_0),$$

Berechne  $SUM(x_{hi}, y_{hi})$  und parallel  $SUM(x_{lo}, y_{lo})$ . Wir erhalten die folgenden Ergebnisse:

$$Z_1^{(n/2)}(x_{hi}, y_{hi}), \quad Z_0^{(n/2)}(x_{hi}, y_{hi}), \quad Z_1^{(n/2)}(x_{lo}, y_{lo}), \quad Z_0^{(n/2)}(x_{lo}, y_{lo}),$$

Diese umfassen jeweils  $n/2 + 1$  Bits, das höchstwertige Bit aus  $Z_1(x_{lo}, y_{lo})$  bzw.  $Z_0(x_{lo}, y_{lo})$  nennen wir Carrybit  $c_1$  bzw.  $c_0$ .

Nun müssen wir angeben, wie wir die Bits für  $Z_1(x, y)$  und  $Z_0(x, y)$  aus diesen Ergebnissen bekommen. Die  $n/2$  niederwertigsten Bits von  $Z_1(x, y)$  bzw.  $Z_0(x, y)$  stimmen natürlich überein mit den Bits von  $Z_1(x_{lo}, y_{lo})$  bzw.  $Z_0(x_{lo}, y_{lo})$ . (Ohne die Carrybits  $c_1$  bzw.  $c_0$ .)

Um die  $n/2 + 1$  höchstwertigen Bits von  $Z_1(x, y)$  zu bekommen, wählen wir  $c_1$  als Selektionsvariable, die, wenn sie 1 ist, die Bits von  $Z_1(x_{hi}, y_{hi})$  auswählt bzw., wenn sie 0 ist, die Bits von  $Z_0(x_{hi}, y_{hi})$  auswählt.

Um die  $n/2 + 1$  höchstwertigen Bits von  $Z_0(x, y)$  zu bekommen, gehen wir genauso vor, benutzen aber  $c_0$  als Selektionsvariable. **end**

Für die Größe  $C(n)$  des Schaltkreises erhalten wir die folgende Rekursionsgleichung:

$C(n) = 2 \cdot C(n/2) + 3n + 6$ . Der Grund liegt darin, daß uns eine Selektion 3 Gatter kostet und Tiefe 2, also kostet die Selektion von  $n/2 + 1$  Bits  $3n/2 + 3$  Gatter und Tiefe 2. Da wir sowohl für  $Z_1$  als auch für  $Z_0$  selektieren, bekommen wir noch einen Faktor 2. Damit ist

$$\begin{aligned} C(n) &= 4 \cdot C(n/4) + 3n + 6 + 3n + 12 = \dots = 2^i \cdot C(n/2^i) + 3ni + 6(1 + 2 + \dots + 2^{i-1}) \\ &= n \cdot C(1) + 3n \log n + 6 \cdot (2^{\log n} - 1) = n \cdot C(1) + 3n \log n + 6 \cdot (n - 1). \end{aligned}$$

Mit  $C(1) = 4$  folgt  $C(n) = 3n \log n + 10n - 6$ . Wie berechnet man  $C(1) = 4$ ? Es ist

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)}(x_0, y_0) &= (x_0 \vee y_0, x_0 \oplus y_0 \oplus 1) \\ Z_0^{(1)}(x_0, y_0) &= (x_0 \wedge y_0, x_0 \oplus y_0) \end{aligned}$$

Jede der 4 auftretenden Funktionen ist eine Funktion in 2 Variablen, in  $B_2$ -Schaltkreisen kostet uns das also nur Tiefe 1 und Größe 4. Zur Tiefe insgesamt:  $D(1) = 1$  und  $D(n) = D(n/2) + 2$ , also  $D(n) = 2 \log n + 1$ .