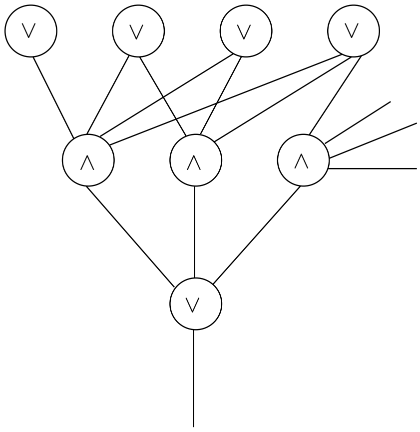
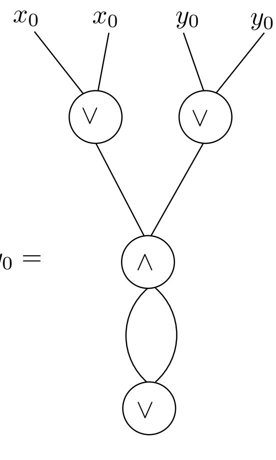
Carry-Look-Ahead-Addierer in Schaltkreisen der Tiefe 3

Behauptung: Für alle $i \geq 0$ lässt sich sowohl c_i als auch $\overline{c}_i$ in Schaltkreisen der folgenden Form berechnen. (Tiefe-3-Schaltkreise, unbeschränkter Fanin, Größe polynomiell in n).

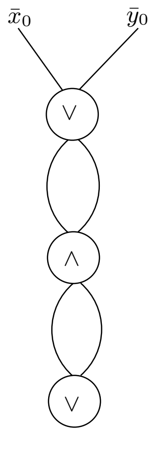


<u>**Beweis:**</u> Durch Induktion über i. Induktionsanfang $i = 0$:

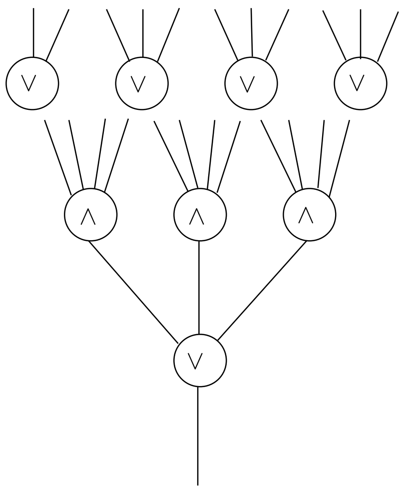
$c_0 = x_0 \wedge y_0 =$



$\overline{c}_0 = \overline{x}_0 \vee \overline{y}_0$

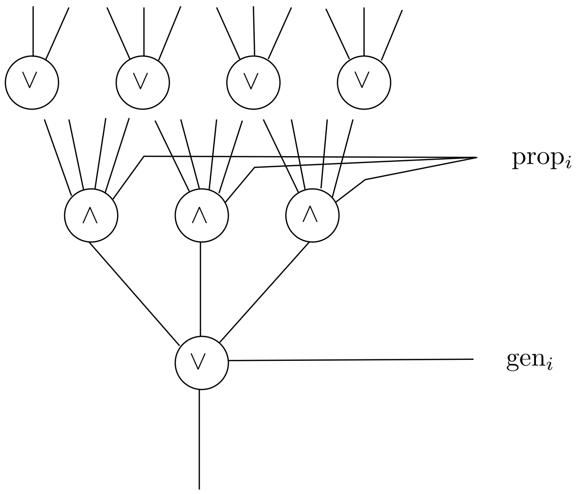


Induktionsschritt: $i \geq 1$. Betrachte zunächst den Schaltkreis für c_{i-1}:

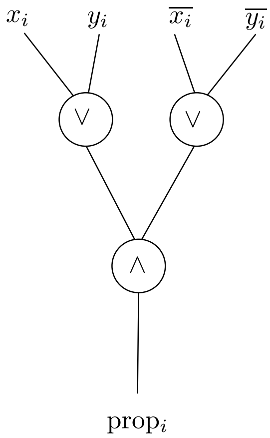


Nun ist $c_i = \text{gen}_i \vee (\text{prop}_i \wedge c_{i-1})$.

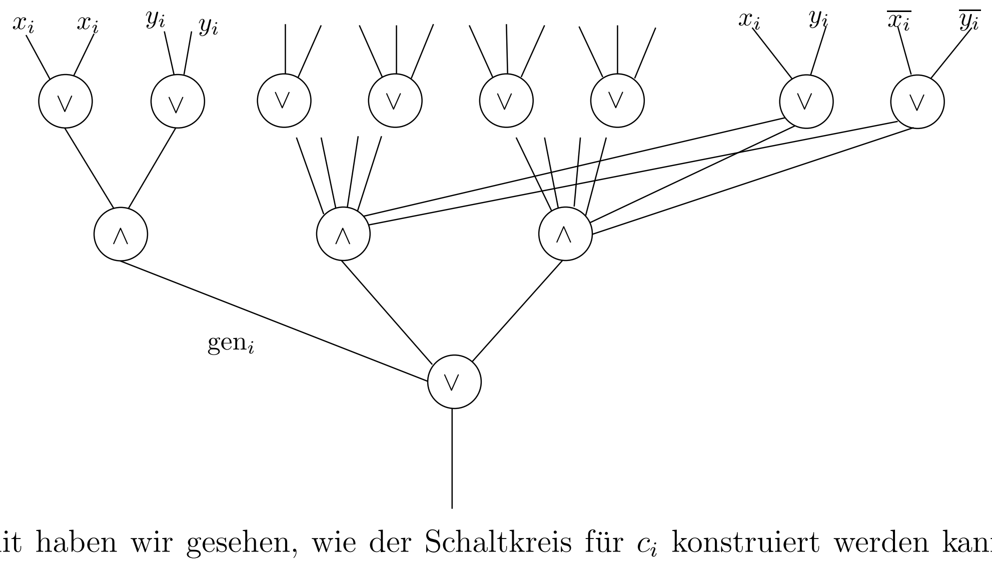
Füttere in jedes $\wedge$-Gatter des c_{i-1}-Schaltkreises prop_i ein und bilde das ODER mit gen_i:



Da sich $\text{prop}_i = (x_i \vee y_i) \wedge (\overline{x}_i \vee \overline{y}_i)$ berechnen lässt, also



sieht der Schaltkreis für c_i so aus:



Damit haben wir gesehen, wie der Schaltkreis für c_i konstruiert werden kann. Analog gilt $\overline{c}_i = \text{elim}_i \vee \text{prop}_i \wedge \overline{c}_{i-1}$ und ähnlich wie bei der Konstruktion von c_i aus c_{i-1} lässt sich der Schaltkreis für $\overline{c}_i$ aus dem für $\overline{c}_{i-1}$ konstruieren.

Wie ist die Größe der Schaltkreise?
Bei $i = 0$ kommen wir mit 4 Gattern aus, beim Übergang von c_{i-1} zu c_i kommen 5 Gatter hinzu. Also ist die Anzahl der Gatter im Schaltkreis für c_i bzw. $\bar{c}_i$ durch $5(i+1)$ beschränkt. Also hat der Schaltkreis für alle c_i und $\bar{c}_i$ (mit $0 \leq i \leq n-1$) zusammen Größe $O(n^2)$. **Ende des Beweises.**

Wie erhalten wir Schaltkreise für s_i? Es ist

$$\begin{aligned} s_i &= x_i \oplus y_i \oplus c_{i-1} \\ &= prop_i \oplus c_{i-1} \\ &= c_{i-1} \wedge \overline{prop_i} \qquad \vee \qquad \bar{c}_{i-1} \wedge prop_i \end{aligned}$$

Wir beachten

$$prop_i = (x_i \vee y_i) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{y}_i)$$

sowie

$$\overline{prop_i} = (x_i \vee \bar{y}_i) \wedge (\bar{x}_i \vee y_i).$$

Ähnlich wie bei der Konstruktion von gerade nimmt man sich die Schaltkreise für c_{i-1} bzw. $\bar{c}_{i-1}$ her und füttert in alle UND-Gatter jeweils die Outputs der Tiefe-2-Schaltkreise für $prop_i$ bzw. $\overline{prop_i}$ hinein. Es ergibt sich wieder ein Tiefe-3-Schaltkreis der Größe $O(n^2)$.