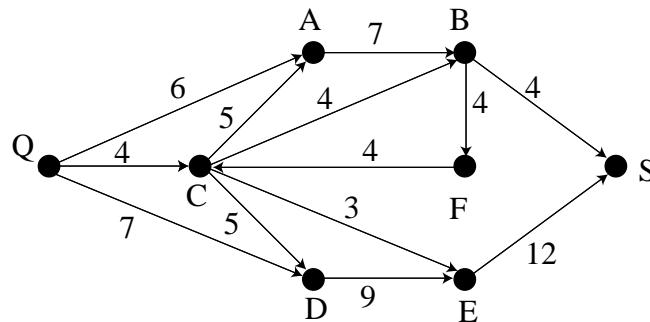


Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
SS 2002
Blatt 13

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Netzwerk, in dem ein maximaler Fluss gefunden werden soll. Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass an Stellen, an denen prinzipiell Wahlfreiheit besteht, die Knoten aufsteigend gemäß alphabetischer Reihenfolge betrachtet werden. Bei der Lösung der Teilaufgaben sind die wesentlichen Zwischenschritte anzugeben.



1. Lösen Sie das Flussproblem auf dem gegebenen Netzwerk mit dem Algorithmus von Ford und Fulkerson. Nehmen Sie dabei an, dass der Algorithmus in DFS-Reihenfolge vorgeht.
2. Lösen Sie das Flussproblem auf dem gegebenen Netzwerk mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp.
3. Wir haben in den Teilaufgaben 1) und 2) gesehen, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson für das angegebene Netzwerk deutlich mehr Iterationen zur Bestimmung eines maximalen Flusses gebraucht hat als der Algorithmus von Edmonds und Karp. Dies ist aber nicht notwendig bei allen Beispielen so.

Geben Sie ein Netzwerk mit n Knoten an, für das der Algorithmus von Ford und Fulkerson nach $O(1)$ Iterationen einen maximalen Fluss gefunden hat, während der Algorithmus von Edmonds und Karp $\Omega(n)$ Iterationen braucht. Wie groß ist die Laufzeit der beiden Algorithmen?

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Lösen Sie das Flussproblem für das Netzwerk aus Aufgabe 13.1 mit dem Algorithmus von Dinic.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

1. $N = (G, Q, S, c)$ mit $G = (V, E)$ sei ein Netzwerk.

Ein Q - S -Schnitt ist eine disjunkte Zerlegung der Knotenmenge V in $V_Q \cup V_S$ mit $V_Q \cap V_S = \emptyset$, $Q \in V_Q$ und $S \in V_S$. Der Wert eines Q - S -Schnittes ist definiert als

$$\text{wert}(V_Q, V_S) = \sum_{e \in E \cap (V_Q \times V_S)} c(e),$$

also als Summe der Kapazitäten aller Kanten, die von V_Q nach V_S führen.

Zeigen Sie:

Gegeben ein Fluss sowie ein Q - S -Schnitt für das Netzwerk N . Dann ist der Wert des Q - S -Schnitts größer oder gleich dem Wert des Flusses.

2. Wir führen für endliche, gerichtete Graphen $G = (V, E)$ zunächst einige Begriffe ein.
- (a) Zwei Wege P_1, P_2 in G von x nach y heißen *knotendisjunkt* genau dann, wenn P_1 und P_2 außer x und y keine Knoten gemeinsam haben.
 - (b) Eine Knotenmenge $M \subseteq V$ trennt x von y genau dann, wenn in dem Graphen

$$G(V \setminus M) := (V \setminus M, E \cap (V \setminus M) \times (V \setminus M))$$

kein Weg von x nach y existiert.

- (c) Die Knoten x und y aus V heißen *k-untrennbar* genau dann, wenn keine Menge $M \subseteq V$ mit $|M| \leq k$ existiert, die x von y trennt.

Beweisen Sie mit Hilfe der Teilaufgabe 1) den folgenden **Satz von Menger**:

$G = (V, E)$ sei ein endlicher gerichteter Graph, x, y seien Knoten in G mit $x \neq y$ und $(x, y) \notin E$.

Dann gilt:

x und y sind k -untrennbar genau dann, wenn es in G mindestens $k + 1$ knotendisjunkte Wege von x nach y gibt.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)

Wir beschäftigen uns jetzt mit Matchings in bipartiten Graphen. Wir erinnern uns, dass bei der Modellierung als Flussproblem ausschließlich einfache Netzwerke entstehen, d. h. Netzwerke, in denen alle Kapazitäten 1 sind und alle Knoten außer der Quelle und der Senke Ausgangsgrad 1 oder Eingangsgrad 1 haben.

Zeigen Sie, dass eine Sperrflussberechnung in einem einfachen Netzwerk mit Kantenmenge E in Zeit $O(|E|)$ möglich ist.