

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
SS 2002
Blatt 11

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Wir betrachten einen bekannten randomisierten Approximationsalgorithmus für das Problem MAXCUT (siehe Blatt 8). Dieser verwendet zwei anfangs leere Mengen S und T und fügt dann jeden Knoten $v \in V$ des gegebenen Graphen $G = (V, E)$ unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in die Menge S und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in die Menge T ein. Offensichtlich erhalten wir damit eine Partition von V in die Mengen S und T sowie einen Schnitt, dessen Größe durch die Anzahl der Kanten, die zwischen S und T verlaufen, bestimmt ist.

1. Schätzen Sie die erwartete Größe des Schnitts möglichst gut nach unten ab.
2. Derandomisieren Sie diesen Algorithmus mit der Methode der bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Wir definieren die Funktion $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i x_j.$$

Finden Sie mithilfe einer f -basierten Partition eine möglichst gute obere Schranke für die erwartete Optimierungszeit des $(1+1)$ -EA auf f .

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Wir ändern die Mutationswahrscheinlichkeit des $(1+1)$ -EA auf den Wert $1/n^{1/2}$. Zeigen Sie, dass der $(1+1)$ -EA dann exponentielle erwartete Zeit zur Optimierung der Funktion ONE-MAX benötigt.

Hinweis: Wir nennen eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ exponentiell wachsend, wenn $f = \Omega(2^{n^\varepsilon})$ für eine Konstante $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Die Funktion $\text{ONESQR}_\delta: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei für eine Konstante $\delta > 0$ definiert durch

$$\text{ONESQR}_\delta(x_1, \dots, x_n) := \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{\delta n}{2} \right)^2.$$

Zeigen Sie, dass der $(1+1)$ -EA die Funktion ONESQR_δ im Fall $\delta < 1$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \varepsilon$ für jede beliebig kleine Konstante $\varepsilon > 0$ in $O(n \log n)$ Schritten optimiert.



Welche Aussagen über die erwartete Optimierungszeit und Erfolgswahrscheinlichkeit vermuten Sie, wenn δ nicht mehr als konstant vorausgesetzt, sondern auf $\delta := 1 - 2/n$ festgelegt wird?

Verlegung der Übungsgruppe 2 (Hubert Wagner) am 25. Juni 2002: Da der Übungsgruppenleiter an diesem Termin verhindert ist, werden die Studierenden der Übungsgruppe 2 gebeten, am 25. Juni ausnahmsweise an der zeitgleich und im selben Gebäude stattfindenden Übungsgruppe 1 (OH 16, E07, 08:15 Uhr) bei Peter Bollweg teilzunehmen.