

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen

SS 2002

Blatt 10

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem: Ein Hobbygärtner will die 100 m^2 Nutzfläche seines Gartens optimal mit Blumen und Gemüse bepflanzen. Sein Kapital beträgt 720 € , für den Anbau sind Arbeits- und Materialkosten von 6 €/m^2 für Gemüse und 9 €/m^2 für Blumen zu veranschlagen. Der zu erwartende (und zu maximierende) Gewinn beträgt 10 €/m^2 für Gemüse und 20 €/m^2 für Blumen. Schließlich sind nur 60 m^2 aufgrund von Sonne und Schatten für den Blumenanbau geeignet.

1. Formalisieren Sie das Streben des Hobbygärtners nach einer optimalen Bepflanzung seines Gartens als lineares Optimierungsproblem.
2. Lösen Sie das erhaltene lineare Optimierungsproblem *grafisch*.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Wir wollen randomisiertes Runden auf das auf den Blättern 8 und 9 behandelte Problem SETCOVER anwenden. Formulieren Sie SETCOVER dazu zunächst als ganzzahliges Optimierungsproblem mit Variablen aus $\{0, 1\}$. Nehmen Sie an, Sie haben nun eine möglicherweise fraktionale Lösung einer entsprechenden linearen Relaxation erhalten und runden die Werte ihrer Variablen wie in Kapitel 7.3 unabhängig randomisiert mit Wahrscheinlichkeiten gemäß ihren Werten auf 1 bzw. 0.

1. Wie groß ist nun für ein beliebiges $x \in X$ die Wahrscheinlichkeit $p(x)$, dass es nicht überdeckt ist?
2. Sie wiederholen das randomisierte Runden, falls Sie keine Lösung für SETCOVER erhalten haben, belassen aber Variablen, die Sie bereits in einem vorigen Schritt auf 1 gesetzt haben, fortan immer auf 1. Wie viele Iterationen dieses Verfahrens genügen, bis die Wahrscheinlichkeit, eine Lösung gefunden zu haben, mindestens $1/2$ beträgt?

Hinweise: Wenn wir mit $p_t(x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element x nach t Iterationen noch nicht überdeckt ist, bezeichnen, lässt sich die Wahrscheinlichkeit, nach t Iterationen insgesamt kein SETCOVER erhalten zu haben, durch $\sum_{x \in X} p_t(x)$ nach oben abschätzen.

Geben Sie in den Aufgabenteilen 1 und 2 Abschätzungen an, die nicht mehr von den Werten der Variablen aus der Lösung des linearen Optimierungsproblems abhängen. Die bei der Analyse in Kapitel 7.3 verwandten Ungleichungen können auch hier hilfreich sein.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

In Kapitel 6.5 der Vorlesung wurde ein PTAS für die Verteilung von n Jobs J_1, \dots, J_n mit Bearbeitungszeiten t_1, \dots, t_n auf zwei Maschinen vorgestellt. Dieses PTAS beruht auf einer

Einteilung des Lösungsraums in Bereiche, die jeweils durch eine feste Verteilung der „großen“ Jobs (das sind die Jobs J_i mit $t_i > \epsilon L$) charakterisiert sind. Insbesondere ist also die Belastung B_1, B_2 der Maschinen 1 und 2 durch große Jobs für alle Lösungen eines gegebenen Bereiches gleich.

Zunächst wurde dann für jeden Bereich durch eine Greedy-Verteilung der kleinen Aufgaben eine hinreichend gute Lösung ermittelt. Dann wurde die beste der ermittelten Lösungen ausgewählt.

Nehmen Sie an, dass wir diese beiden Schritte vertauschen. Zunächst wählen wir den Bereich, in dem $\max\{B_1, B_2\}$ minimal ist. Erst dann berechnen wir für diesen (und nur für diesen) Bereich eine Lösung durch eine Greedy-Verteilung der kleinen Jobs und geben diese Lösung aus.

Liefert diese Vorgehensweise immer noch ein PTAS?

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Wir betrachten wieder n Jobs J_1, \dots, J_n mit positiven Bearbeitungszeiten $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{N}$. Ziel ist es, eine Verteilung dieser Jobs auf drei Maschinen zu finden, so dass $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ minimal ist. Unser Kostenmaß ist jetzt also die Summe der Quadrate der Lasten der Maschinen.

Konstruieren Sie ein FPTAS für dieses Problem durch geeignete Modifikation der Vorgehensweise in Kapitel 6.6 der Vorlesung.