

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen
SS 2002
Blatt 3

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Wenn ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ genau k Zusammenhangskomponenten enthält, dann gilt $|E| \geq |V| - k$.
- b) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen ungerichteten Graphen, in dem jeder Knoten Schnittpunkt ist.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Bei einer Breitensuche („breadth first search“, BFS) in einem Graphen werden ausgehend von einem Knoten v zuerst v , dann alle Nachbarn von v und dann erst die Nachbarn der Nachbarn abgearbeitet usw. Die BFS-Nummern sind dann in der Reihenfolge definiert, in der die Knoten besucht werden.

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der einen gerichteten Graphen, der durch seine Adjazenzlisten gegeben ist, in BFS-Reihenfolge durchläuft und dabei die BFS-Nummern berechnet.
- b) Sei v ein Knoten des Graphen. Erweitern Sie den Algorithmus, sodass für jeden Knoten w des Graphen die Länge des kürzesten Weges von v nach w berechnet wird.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Der im Skript vorgestellte Algorithmus von Dijkstra zur Berechnung kürzester Pfade ist nur auf Graphen mit positiven Kantengewichten anwendbar. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Algorithmus ein falsches Ergebnis liefert, wenn auch negative Kantengewichte zugelassen sind. Wieso ist der Beweis im Skript fehlerhaft, falls auch negative Kantengewichte erlaubt sind? Überlegen Sie, welche Bedingungen an einen Graphen, der auch negative Kantengewichte haben darf, gestellt werden müssen, damit die Länge von Wegen noch sinnvoll definiert ist.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei ein kantengewichteter Graph $G = (V, E, r)$ mit $r: E \rightarrow [0; 1]$ gegeben. Die Kantengewichte $r(u, v)$ repräsentieren die Verlässlichkeit eines Kommunikationskanals von Knoten u zu Knoten v . Wir interpretieren den Wert $r(u, v)$ als Wahrscheinlichkeit, dass der Kommunikationskanal zwischen u und v nicht ausfällt, d. h. $r(u, v) = 1$ bedeutet, dass der Kanal zwischen u und v auf keinen Fall ausfällt, und $r(u, v) = 0$ bedeutet, dass der Kanal zwischen u und v immer ausfällt. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander sind. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der einen ausfallsichersten Weg zwischen zwei gegebenen Knoten berechnet.