Thomas Kesselheim 17. Juli 2017

Abgabe: in der Vorlesung am 24. Juli 2017

Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 11

Die erforderliche Punktzahl wird auf 105 festgesetzt. Mit diesem Übungsblatt gibt es noch einmal 25 Punkte. Aufgaben 4 und 5 benötigen kein Verständnis der Smoothness-Definition.

Aufgabe 1: (4+4 Punkte)

Wir betrachten den Fall einer Auktion von k identischen Gegenständen. Bieter i hat Wert v_i, falls er mindestens einen dieser Gegenstände erhält, 0 sonst.
Wir untersuchen folgende Mechanismen:

(a) Jeder Bieter bietet eine reelle Zahl $b_i \geq 0$. Diejenigen Bieter mit den k höchsten Geboten gewinnen und zahlen jeweils ihr Gebot. Verlierer bezahlen nichts.

(b) Jeder Bieter bietet k reelle Zahlen $b_{i,1}, \ldots, b_{i,k} \geq 0$. Gegenstand j geht an denjenigen Bieter i mit höchstem $b_{i,j}$. Wenn Bieter i mindestens einen Gegenstand gewinnt, hat er Wert v_i, zahlt aber die Summe seiner gewinnenden Gebote. Verlierer bezahlen nichts.

Zeige jeweils, dass der Mechanismus $(\frac{1}{2}, 1)$-smooth ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Betrachte die Single-Item All-Pay Auction: Ein Gegenstand wird versteigert. Jeder Bieter gibt ein Gebot b_i ab. Derjenige Bieter mit höchstem Gebot erhält den Gegenstand. Alle Bieter müssen ihr jeweiliges Gebot bezahlen, auch die Verlierer.
Zeige, dass dieser Mechanismus $(\frac{1}{3}, 1)$-smooth ist.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

In Vorlesung 10 haben wir den Greedy-by-Value-Algorithmus kennengelernt. Wie dort wollen wir jetzt annehmen, dass die Bieter *single minded* sind und die Mengen S_i^* öffentlich bekannt. Die Gebote sind entsprechend nur reelle Zahlen $b_i \geq 0$. Konstruiere hieraus einen Mechanismus, indem Gewinner ihr jeweiliges Gebot bezahlen, Verlierer nichts.
Zeige, dass dieser Mechanismus $(\frac{1}{2}, d)$-smooth ist.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Zeige, dass die Second-Price Auction nicht (λ, μ)-smooth ist für $\lambda > 0$, $\mu < \infty$.
Hinweis: Übungsblatt 6.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass der Mechanismus, der auf dem Greedy-by-Sqrt-Value-Density-Algorithmus basierte, einen Price of Anarchy von $O(\sqrt{m})$ hat. Ersetze den Greedy-Algorithmus nun durch exakte Optimierung. Das heißt, auf den Geboten wird eine Allokation mit größtem behaupteten Wert berechnet (exakt, nicht approximativ). Wie bisher bezahlt jeder den behaupteten Wert für die Menge, die er erhält. Zeige, dass der Price of Anarchy mindestens m ist, sogar für reine Nash-Gleichgewichte.
Hinweis: Es reichen $m+2$ Bieter, die *single minded* sind. $S_1^* = \{1\}, \ldots, S_m^* = \{m\}, S_{m+1}^* = S_{m+2}^* = \{1, \ldots, m\}, v_1^* = \ldots = v_{m+2}^* = 1$. Konstruiere zunächst ein Gleichgewicht von Bietern $m+1$ und $m+2$.