Thomas Kesselheim

19. Juni 2017

Abgabe: in der Vorlesung am 26. Juni 2017

Algorithmische Spieltheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: (2+3 Punkte)

Wir betrachten den Fall einer Auktion von k identischen Gegenständen. Bieter i hat Wert v_i, falls er mindestens einen dieser Gegenstände erhält, 0 sonst.

(a) Nutze Myerson's Lemma, um einen Truthful Mechanism anzugeben. Gib hierbei die Funktion f explizit an und zeige, welche Funktion p sich aus der Integralformel ergibt.

(b) Betrachte nun den Mechanismus, der nacheinander k Second-Price-Auktionen durchführt. Zeige, dass selbst im Fall von drei Spielern und $k = 2$ wahrheitsgemäßes Bieten nicht zwangsläufig ein reines Nash-Gleichgewicht ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Wir betrachten eine Rucksack-Auktion. Jeder Bieter i hat ein öffentlich bekanntes Gewicht w_i und einen privaten Wert v_i. Es können beliebige Mengen S von Bietern akzeptiert werden, so lange $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ für eine feste Schranke W. Wir nehmen an, dass $0 \leq w_i \leq W$ für alle i.

Folgender Algorithmus ist eine 2-Approximation

- Sortiere die Bieter, so dass $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \dots \frac{v_n}{w_n}$. Sei k maximal, so dass $\sum_{i=1}^{k} w_i \leq W$ und set $S_1 = \{1, \dots, k\}$.
- Sei i^* derjenige Bieter mit maximalem v_i und sei $S_2 = \{i^*\}$.
- Gib die bessere der Lösungen S_1 oder S_2 zurück.

Zeige, dass dieser Algorithmus monoton ist und gib mit Hilfe von Myerson's Lemma einen Truthful Mechanism an.

Aufgabe 3 auf der nächsten Seite.

Aufgabe 3: (3+3+4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine alternative Charakterisierung von Truthful Mechanisms gezeigt werden, die in folgendem Theorem formuliert ist. Diese gilt für beliebige Mechanismen, nicht nur in Single-Parameter-Umgebungen.

Theorem. Ein Mechanismus $M = (f, p)$ ist truthful genau dann, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für beliebige b_i, b_i' gilt: Wenn $f(b_i, b_{-i}) = f(b_i', b_{-i})$, so gilt auch $p_i(b_i, b_{-i}) = p_i(b_i', b_{-i})$. In anderen Worten: Für alle b_{-i}, für alle $a \in X_i$ existieren Preise $p_a \in \mathbb{R}$, so dass für alle b_i mit $f(b_i, b_{-i}) = a$ gilt $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$.

(ii) Der Mechanismus optimiert für jeden Spieler. Formal: Für jedes b_i und jedes b_{-i} muss gelten

$$f(b_i, b_{-i}) \in \arg\max_a (v_i(a) - p_a),$$

wobei die Zuweisungen a dem Wertebereich von $f(\cdot, b_{-i})$ entsprechen.

Löse dazu folgende Teilaufgaben:

(a) Zeige, dass wenn Bedingung (i) verletzt ist, M nicht truthful sein kann.

(b) Zeige, dass wenn Bedingung (ii) verletzt ist, M nicht truthful sein kann.

(c) Zeige, dass wenn Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind, M truthful ist.

Hinweis: Myerson's Lemma sollte nicht verwendet werdet und ist auch nicht hilfreich. Alle Argumente benötigen nur die Truthfulness-Ungleichung mit sinnvoll ausgewählten Abweichungen.