technische universität
dortmund

Effiziente Algorithmen und
Komplexitätstheorie /

Informatik

Matching under Preferences

Anja Rey, 22. Mai 2017

Themenübersicht

Vielseitige Anwendungen: *Hospitals-Residents*-Problem, Mitbewohner-Problem, Häuser zuordnen, Nierenaustausch etc.

Themenübersicht

Vielseitige Anwendungen: *Hospitals-Residents*-Problem, Mitbewohner-Problem, Häuser zuordnen, Nierenaustausch etc.

Eine Instanz besteht aus

- Agenten (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen Präferenzen über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Themenübersicht

Vielseitige Anwendungen: *Hospitals-Residents*-Problem, Mitbewohner-Problem, Häuser zuordnen, Nierenaustausch etc.

Eine Instanz besteht aus

- Agenten (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen Präferenzen über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Ziel: *faire* oder *optimale* Zuweisung (*Matching*) finden

Themenübersicht

Vielseitige Anwendungen: *Hospitals-Residents*-Problem, Mitbewohner-Problem, Häuser zuordnen, Nierenaustausch etc.

Eine Instanz besteht aus

- Agenten (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen Präferenzen über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Ziel: *faire* oder *optimale* Zuweisung (*Matching*) finden

Wir unterscheiden zwischen

- bipartiten Zuweisungen mit beidseitigen Präferenzen
- bipartiten Aufteilungen mit einseitigen Präferenzen
- nicht-bipartiten Zuweisungen mit Präferenzen

Themenübersicht

Vielseitige Anwendungen: *Hospitals-Residents*-Problem, Mitbewohner-Problem, Häuser zuordnen, Nierenaustausch etc.

Eine Instanz besteht aus

- Agenten (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen Präferenzen über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Ziel: *faire* oder *optimale* Zuweisung (*Matching*) finden

Wir unterscheiden zwischen

- bipartiten Zuweisungen mit beidseitigen Präferenzen
- bipartiten Aufteilungen mit einseitigen Präferenzen
- nicht-bipartiten Zuweisungen mit Präferenzen

Hier: Design und Analyse effizienter Algorithmen (oder ggf. Aussagen über Nicht-Existenz oder Härte solcher Algorithmen)

Themenübersicht

Vielseitige Anwendungen: *Hospitals-Residents*-Problem, Mitbewohner-Problem, Häuser zuordnen, Nierenaustausch etc.

Eine Instanz besteht aus

- Agenten (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen Präferenzen über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Ziel: *faire* oder *optimale* Zuweisung (*Matching*) finden, z. B. Stabilitätskonzept

Wir unterscheiden zwischen

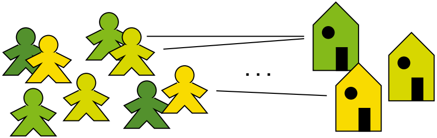
- bipartiten Zuweisungen mit beidseitigen Präferenzen
- bipartiten Aufteilungen mit einseitigen Präferenzen
- nicht-bipartiten Zuweisungen mit Präferenzen

Hier: Design und Analyse effizienter Algorithmen (oder ggf. Aussagen über Nicht-Existenz oder Härte solcher Algorithmen)

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

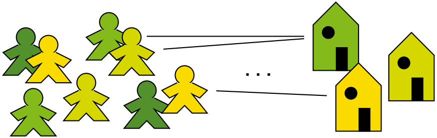
Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



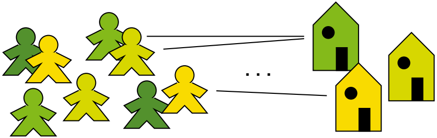
Definition 1 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

Eine HR-Instanz besteht aus

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 1 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

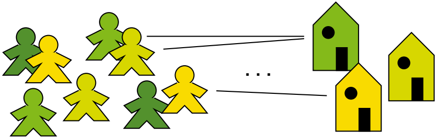
Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \ldots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \ldots, h_{n_2}\}$

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 1 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

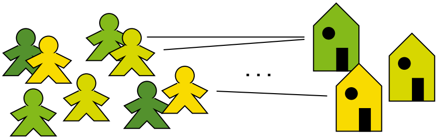
Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \ldots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \ldots, h_{n_2}\}$
- $\forall h_j \in H$: Kapazität c_j

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 1 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

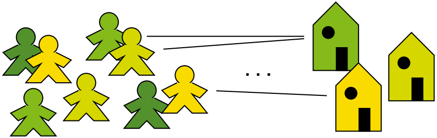
Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \dots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \dots, h_{n_2}\}$
- $\forall h_j \in H$: Kapazität c_j
- $E \subseteq R \times H$ akzeptable Paare, $m = \|E\|$
- $\forall r_i \in R$: $A(r_i) = \{h_j \in H \mid (r_i, h_j) \in E\}$, $\forall h_j \in R$: $A(h_j) = \{r_i \in R \mid (r_i, h_j) \in E\}$

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 1 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

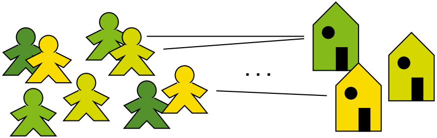
Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \dots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \dots, h_{n_2}\}$
- $\forall h_j \in H$: Kapazität c_j
- $E \subseteq R \times H$ akzeptable Paare, $m = \|E\|$
- $\forall r_i \in R$: $A(r_i) = \{h_j \in H \mid (r_i, h_j) \in E\}$, $\quad \forall h_j \in R$: $A(h_j) = \{r_i \in R \mid (r_i, h_j) \in E\}$
- $\forall a_k \in R \cup H$: strikte Präferenzliste über $A(k)$

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 1 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \dots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \dots, h_{n_2}\}$
- $\forall h_j \in H$: Kapazität c_j
- $E \subseteq R \times H$ akzeptable Paare, $m = \|E\|$
- $\forall r_i \in R$: $A(r_i) = \{h_j \in H \mid (r_i, h_j) \in E\}$, $\forall h_j \in R$: $A(h_j) = \{r_i \in R \mid (r_i, h_j) \in E\}$
- $\forall a_k \in R \cup H$: strikte Präferenzliste über $A(k)$

M ist eine Zuweisung (*Matching*), wenn $|M(r_i)| \leq 1 \; \forall r_i \in R$ und $|M(h_j)| \leq c_j \; \forall h_j \in H$

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien I eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in I.

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien I eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in I.

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Arzt r_i ist nicht zugewiesen oder bevorzugt h_j vor $M(r_i)$;

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien I eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in I.

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Arzt r_i ist nicht zugewiesen oder bevorzugt h_j vor $M(r_i)$;
- Krankenhaus h_j ist unterbesetzt oder bevorzugt r_i vor mindestens einem Arzt in $M(h_j)$.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien I eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in I.

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Arzt r_i ist nicht zugewiesen oder bevorzugt h_j vor $M(r_i)$;
- Krankenhaus h_j ist unterbesetzt oder bevorzugt r_i vor mindestens einem Arzt in $M(h_j)$.

Eine Zuweisung M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien I eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in I.

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Arzt r_i ist nicht zugewiesen oder bevorzugt h_j vor $M(r_i)$;
- Krankenhaus h_j ist unterbesetzt oder bevorzugt r_i vor mindestens einem Arzt in $M(h_j)$.

Eine Zuweisung M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

Satz 2

Es gibt immer eine stabile Zuweisung.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz
Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

1. alle Ärzte frei
2. alle Krankenhäuser komplett unbesetzt

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz
Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

```
alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein r ∈ R frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
        h ← erstes Krankenhaus auf Liste von r
```

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

```
alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein r ∈ R frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
        h ← erstes Krankenhaus auf Liste von r
        Falls h vollständig besetzt:
                r′ ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
                r′ frei
```

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

```
alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein r ∈ R frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
    h ← erstes Krankenhaus auf Liste von r
    Falls h vollständig besetzt:
        r′ ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        r′ frei
    Weise r zu h zu
```

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

```
alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein r ∈ R frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
    h ← erstes Krankenhaus auf Liste von r
    Falls h vollständig besetzt:
        r′ ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        r′ frei
    Weise r zu h zu
    Falls h vollständig besetzt:
        s ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
```

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein $r \in R$ frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
    $h \leftarrow$ erstes Krankenhaus auf Liste von r
    Falls h vollständig besetzt:
        $r' \leftarrow$ schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        r' frei
    Weise r zu h zu
    Falls h vollständig besetzt:
        $s \leftarrow$ schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        Für jeden Nachfolger s' von s auf Liste von h
            Entferne s' und h aus deren jeweiligen Listen

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

```
alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein r ∈ R frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
    h ← erstes Krankenhaus auf Liste von r
    Falls h vollständig besetzt:
        r′ ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        r′ frei
    Weise r zu h zu
    Falls h vollständig besetzt:
        s ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        Für jeden Nachfolger s′ von s auf Liste von h
            Entferne s′ und h aus deren jeweiligen Listen
Gib die Menge der zugewiesenen Paare zurück.
```

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z.

Satz 3 (*Rural Hospitals*)

Für eine gegebene HR*-Instanz gelten:*

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z.

Satz 3 (*Rural Hospitals*)

Für eine gegebene HR*-Instanz gelten:*

- *In allen stabilen Zuweisungen bekommen die gleichen Ärzte ein Krankenhaus zugewiesen.*

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z.

Satz 3 (*Rural Hospitals*)

Für eine gegebene HR*-Instanz gelten:*

- *In allen stabilen Zuweisungen bekommen die gleichen Ärzte ein Krankenhaus zugewiesen.*
- *Jedes Krankenhaus bekommt in allen stabilen Zuweisungen die gleiche Anzahl an Ärzten.*

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z.

Satz 3 (*Rural Hospitals*)

Für eine gegebene HR*-Instanz gelten:*

- *In allen stabilen Zuweisungen bekommen die gleichen Ärzte ein Krankenhaus zugewiesen.*
- *Jedes Krankenhaus bekommt in allen stabilen Zuweisungen die gleiche Anzahl an Ärzten.*
- *Jedes Krankenhaus, das in einer stabilen Zuweisung unterbesetzt ist, bekommt in jeder stabilen Zuweisung die gleichen Ärzten zugewiesen.*

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Varianten:

- stabiles Heiratsproblem (1:1)

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Varianten:

- stabiles Heiratsproblem (1:1)
- Indifferenzen in Präferenzen: schwache, starke und Super-Stabilität

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Varianten:

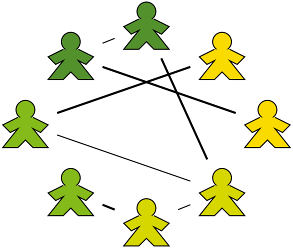
- stabiles Heiratsproblem (1:1)
- Indifferenzen in Präferenzen: schwache, starke und Super-Stabilität
- Berücksichtigung von Paaren
- Quoten: Mindestanzahlen und gemeinsame Kapazitäten
- (*many:many*)-Varianten: Zuweisung von Arbeitern und Firmen

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Varianten:

- stabiles Heiratsproblem (1:1)
- Indifferenzen in Präferenzen: schwache, starke und Super-Stabilität
- Berücksichtigung von Paaren
- Quoten: Mindestanzahlen und gemeinsame Kapazitäten
- (*many:many*)-Varianten: Zuweisung von Arbeitern und Firmen
- das Projekt-Zuweisungs-Problem
  - Kapzitäten von Projekten und Dozenten
  - Studierende und Dozenten haben Präferenzen über Teilmengen (Studierende)
  - Angebote von Dozenten
- tripartite Zuweisung
- ...

Stabiles Mitbewohnerproblem



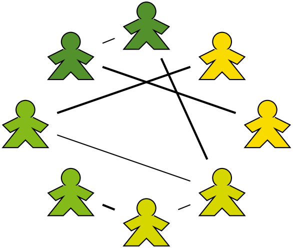
Situation: nicht-bipartite, möglicherweise unvollständige Präferenzen über alle möglichen Mitbewohner

Ziel: paarweise Zuweisung

Stabiles Mitbewohnerproblem

Situation: nicht-bipartite, möglicherweise unvollständige Präferenzen über alle möglichen Mitbewohner

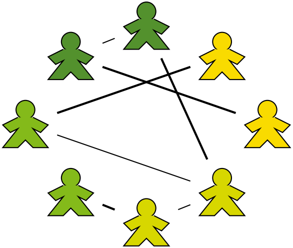
Ziel: paarweise Zuweisung



Definition 4 (Das *Stable-Roommates*-Problem (SR))

Eine SR-Instanz besteht aus

Stabiles Mitbewohnerproblem



Situation: nicht-bipartite, möglicherweise unvollständige Präferenzen über alle möglichen Mitbewohner

Ziel: paarweise Zuweisung

Definition 4 (Das *Stable-Roommates*-Problem (SR))

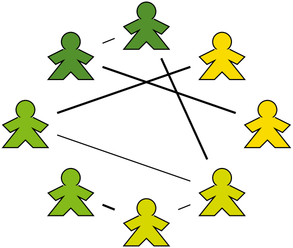
Eine SR-Instanz besteht aus

- Agenten $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

Stabiles Mitbewohnerproblem

Situation: nicht-bipartite, möglicherweise unvollständige Präferenzen über alle möglichen Mitbewohner

Ziel: paarweise Zuweisung

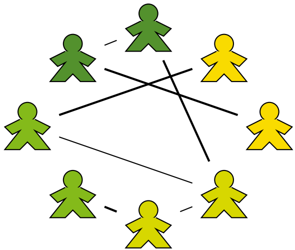


Definition 4 (Das *Stable-Roommates*-Problem (SR))

Eine SR-Instanz besteht aus

- Agenten $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$
- $E = \{\{a_i, a_j\} \mid a_i, a_j \in A, i \neq j, \{a_i, a_j\} \text{ akzeptable Paare}\}$, $m = \|E\|$
- $\forall a_i \in A$: $A(a_i) = \{a_j \in E \mid \{a_i, a_j\} \in E\}$

Stabiles Mitbewohnerproblem



Situation: nicht-bipartite, möglicherweise unvollständige Präferenzen über alle möglichen Mitbewohner

Ziel: paarweise Zuweisung

Definition 4 (Das *Stable-Roommates*-Problem (SR))

Eine SR-Instanz besteht aus

- Agenten $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$
- $E = \{\{a_i, a_j\} \mid a_i, a_j \in A, i \neq j, \{a_i, a_j\} \text{ akzeptable Paare}\}$, $m = \|E\|$
- $\forall a_i \in A$: $A(a_i) = \{a_j \in E \mid \{a_i, a_j\} \in E\}$
- $\forall a_i \in A$: strikte Präferenzliste über $A(a_i)$

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei I eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine Zuweisung in I, falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei I eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine Zuweisung in I, falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Ein Paar $(a_i, a_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Agent a_i nicht zugewiesen ist oder a_j vor $M(a_i)$ bevorzugt;
- Agent a_j nicht zugewiesen ist oder a_i vor $M(a_j)$ bevorzugt.

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei I eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine Zuweisung in I, falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Ein Paar $(a_i, a_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Agent a_i nicht zugewiesen ist oder a_j vor $M(a_i)$ bevorzugt;
- Agent a_j nicht zugewiesen ist oder a_i vor $M(a_j)$ bevorzugt.

M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei I eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine Zuweisung in I, falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Ein Paar $(a_i, a_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Agent a_i nicht zugewiesen ist oder a_j vor $M(a_i)$ bevorzugt;
- Agent a_j nicht zugewiesen ist oder a_i vor $M(a_j)$ bevorzugt.

M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

I heißt lösbar, falls es eine stabile Zuweisung in I gibt.

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei I eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine Zuweisung in I, falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Ein Paar $(a_i, a_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Agent a_i nicht zugewiesen ist oder a_j vor $M(a_i)$ bevorzugt;
- Agent a_j nicht zugewiesen ist oder a_i vor $M(a_j)$ bevorzugt.

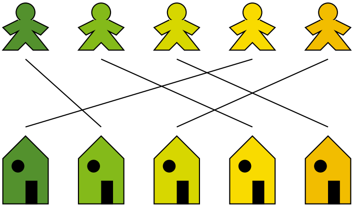
M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

I heißt lösbar, falls es eine stabile Zuweisung in I gibt.

Konzepte

- SR-Instanzen sind nicht immer lösbar.
- Es gibt immer eine stabile Partitionierung.
- fast-stabile Zuweisungen berücksichtigen geringe Kompromisse.

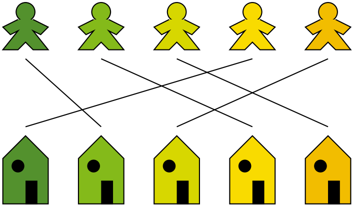
Zuweisung von Häusern



Situation: einseitige Präferenzen von Agenten über Häuser

Ziel: (1 : 1)-Zuweisung

Zuweisung von Häusern



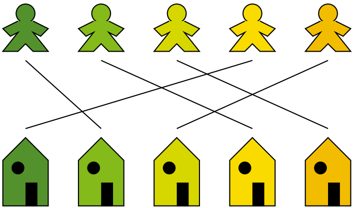
Situation: einseitige Präferenzen von Agenten über Häuser

Ziel: (1 : 1)-Zuweisung

Optimalitätskriterien

- Pareto-Optimalität
- Popularität
- profilbasierte Optimalität

Zuweisung von Häusern



Situation: einseitige Präferenzen von Agenten über Häuser

Ziel: (1 : 1)-Zuweisung

Optimalitätskriterien

- Pareto-Optimalität
- Popularität
- profilbasierte Optimalität

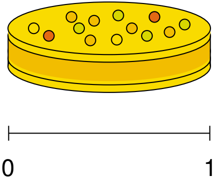
Varianten:

- *Housing Markets*: bestehende Zuweisung, individuelle Rationalität
- Gleichstände
- (*many*:1)-Verallgemeinerung: WG mit Kapazitäten

Ausblick: Verwandte Themen

Faire oder optimale Aufteilung (*Allocation*): bipartit, einseitige Präferenzen

teilbare Güter:



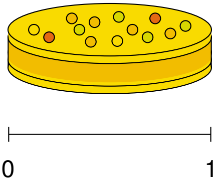
Situation: inhomogener *Kuchen*

Ziel: jeder bekommt eine *faire* Portion

Ausblick: Verwandte Themen

Faire oder optimale Aufteilung (*Allocation*): bipartit, einseitige Präferenzen

teilbare Güter:



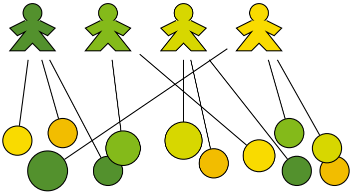
Situation: inhomogener *Kuchen*

Ziel: jeder bekommt eine *faire* Portion

unteilbare Güter

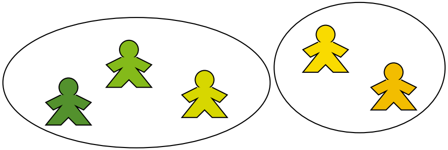
Situation: Objekte/Ressourcen mit unterschiedlichem Wert für Agenten

Ziel: jeder bekommt einen *optimalen* Anteil (1 : *many*)



Ausblick: Verwandte Themen

Koalitionsbildung: nicht-bipartite Präferenzen über Teilmengen der Spieler



Situation: Koalitionsbildung; Zufriedenheit der Spieler hängt nur von eigener Koalition ab.

Ziel: stabile Koalitionsstruktur finden

Literatur

F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang und A. Procaccia, Editoren.
Handbook of Computational Social Choice.
Cambridge University Press, 2016.

D. Gusfield und R. Irving
The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.
MIT Press, 1989.

D. Knuth.
Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems.
volume 10 of CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society, 1997. Original: Mariages Stables, Les Presses de L' Université de446 Montreal, 1976.

D. Manlove
Algorithmics Of Matching Under Preferences.
Volume 2 of Theoretical computer science. World Scientific Publishing, 2013.

. . . und jede Menge Referenzen darin.