Theorem 1. *Die All-Pay Auction is* $(\frac{1}{2}, 2)$*-smooth.*

Beweis. Sei v ein beliebiges Bewertungsprofil, sei j einer der Bieter mit maximalem v_j.

Setze $b_j^* = \frac{v_j}{2}$ und $b_i^* = 0$ für $i \neq j$.

Betrachte ein beliebiges Gebotsprofil b.

Fall 1: $\max_i b_i > \frac{v_j}{2}$. In diesem Fall verliert Spieler j bei Geboten (b_j^*, b_{-j}). Sein Nutzen ist also $u_j(b_j^*, b_{-j}) = -b_j^* = -\frac{v_j}{2} \geq \frac{1}{2} v_j - 2 \max_i b_i$.

Fall 2: $\max_i b_i < \frac{v_j}{2}$. Hier gewinnt Spieler j bei Geboten (b_j^*, b_{-j}). Sein Nutzen ist also $u_j(b_j^*, b_{-j}) = v_j - b_j^* = \frac{v_j}{2} \geq \frac{1}{2} v_j - 2 \max_i b_i$.

Fall 3: $\max_i b_i = \frac{v_j}{2}$. Hier gewinnt oder verliert Spieler j je nachdem wie Gleichstände aufgelöst werden. Es gilt aber auch $u_j(b_j^*, b_{-j}) \geq \frac{1}{2} v_j - 2 \max_i b_i$.

Weiterhin gilt: $\sum_i p_i(b) = \sum_i b_i \geq \max_i b_i$.

Schließlich gilt für $i \neq j$, dass $u_i(b_i^*, b_{-i}) \geq 0$, weil $b_i^* = 0$ und damit keinesfalls etwas bezahlt werden muss.

In Kombination gilt also:

$$\sum_i u_i(b_i^*, b_{-i}) \geq u_j(b_j^*, b_{-j}) \geq \frac{1}{2} v_j - 2 \max_i b_i \geq \frac{1}{2} v_j - 2 \sum_i p_i(b) = \frac{1}{2} OPT(v) - 2 \sum_i p_i(b) \ .$$

Damit ist die Aktion $(\frac{1}{2}, 2)$-smooth. □