technische universität dortmund

Beate Bollig, Marc Gillé, Jens Lechner
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Sommersemester 2011

TIfAI Übung – Blatt 5

Ausgabedatum: 3.5.2011 — Abgabedatum: 9.5.2011, 14:00 Uhr

Aufgabe 5.1: Polynomielle Reduktion

Kurzaufgabe (1 Punkt):

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $=_p$ eine Äquivalenzrelation ist. Beweise, dass P bezüglich $=_p$ genau die drei Äquivalenzklassen $\emptyset$, Σ^* und $(P - \{\Sigma^*, \emptyset\})$ enthält.

Hauptaufgabe (4 Punkte):

Beim Tauschproblem (TP) erhalten wir eine Liste von n Inseraten wie diesem:

Suche: 2x Banane, 1x Stift $\rightsquigarrow$ Biete: 1x Bett, 3x Bücher.

Ein Inserat besteht aus zwei Listen: „Suche“-Liste und „Biete“-Liste. Beide Listen dürfen beliebig viele Einträge besitzen. Jeder Eintrag in einer Liste besteht aus einem Gegenstand und einer natürlichen Zahl, die die Anzahl für diesen Gegenstand angibt.

Wir besitzen am Anfang einen Apfel und möchten diesen gerne in eine Bescheinigung über die bestandene Studienleistung für TIfAI (und eventuelle Restgegenstände) umtauschen. Um dies zu erreichen, können wir in beliebiger Reihenfolge Inserate aus den n vorhandenen Inseraten annehmen, d.h. wir geben die Gegenstände unter „Suche“ ab (was voraussetzt, dass wir sie besitzen) und erhalten die unter „Biete“ angegebenen Gegenstände. Wenn wir z.B. 5 Bananen und 2 Stifte besitzen und das oben angegebene Inserat annehmen, besitzen wir nach dem Umtausch 3 Bananen, 1 Stift, 1 Bett und 3 Bücher. Jedes Inserat kann höchstens einmal angenommen werden.

1. Zeige, dass TP $\in$ NP ist.
2. Gib eine polynomielle Reduktion von DHC auf TP an, d.h. zeige DHC $\leq_p$ TP.

Aufgabe 5.2: NP-Vollständigkeit

Kurzaufgabe (1 Punkt):

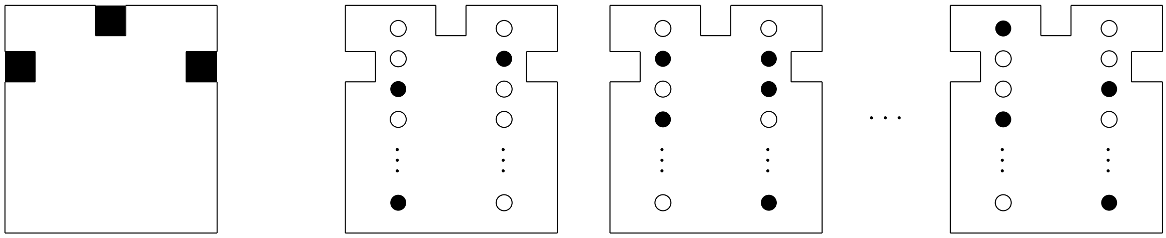
Wann ist ein Problem NP-vollständig bzw. NP-schwer? Angenommen ich kenne mindestens ein NP-vollständiges Problem. Wie kann ich zeigen, dass ein weiteres Problem NP-vollständig ist?

Hauptaufgabe (4 Punkte):

Betrachte folgendes Kartenproblem CARD:

Gegeben ist eine Box mit Einbuchtung an der linken, rechten und oberen Seite und n Karten mit passenden Ausstanzungen passend zu dieser Box. Damit gibt es genau zwei Möglichkeiten eine Karte in die Box zu legen. Jede Karte enthalt rechts und links eine Spalte mit runden Markierungen, von denen einige ausgestanzt sind und andere nicht (siehe Abbildung). Die

Frage ist, ob die Karten so in die Box gelegt werden können, so dass der Boden der Box nicht zu sehen ist, d.h. alle ausgestanzten Löcher von einer oberen Karte bedeckt werden.



Box Karte 1 Karte 2 … Karte n

1. Zeige, dass CARD $\in$ NP ist.
2. Gib eine polynomielle Reduktion von SAT auf CARD an, d.h. zeige SAT $\leq_p$ CARD.

Aufgabe 5.3: Erfüllbarkeitsproblem

Kurzaufgabe (1 Punkt):

In der Hauptaufgabe wird ein Graph G konstruiert. Begründe die Richtigkeit der folgenden Beobachtung: Wenn in G ein gerichteter Weg von ℓ_1 nach ℓ_2 existiert, dann existiert auch ein gerichteter Weg von $\overline{\ell}_2$ nach $\overline{\ell}_1$.

Hauptaufgabe (4 Punkte):

Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass 3-SAT NP-vollständig ist. Wir wollen nun in kleinen Schritten zeigen, dass 2-SAT – also der Spezialfall von SAT, bei dem alle Klauseln aus genau zwei Literalen bestehen – in polynomieller Zeit gelöst werden kann.

Eingabe für 2-SAT ist eine Klauselmenge K über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Daraus konstruieren wir zunächst einen gerichteten Graph $G = (V, E)$, so dass die Knotenmenge V der Menge aller möglichen Literale entspricht, also $V = \{x_1, \overline{x}_1, \ldots, x_n, \overline{x}_n\}$. Für jede Klausel $\ell_1 \vee \ell_2$ aus K enthält E die Kanten $(\overline{\ell}_1, \ell_2)$ und $(\overline{\ell}_2, \ell_1)$. Für die Klausel $(x_1, \overline{x}_2)$ würden wir also zum Beispiel die Kanten $(\overline{x}_1, \overline{x_2})$ und (x_2, x_1) in E einfügen.

(*a*) *Die Knoten von G entsprechen Literalen, d.h. eine Variablenbelegung weist jedem Knoten einen Wahrheitswert aus $\{0, 1\}$ zu. Zeige, dass eine Variablenbelegung genau dann K erfüllt, wenn keine Kanten von Knoten mit Wahrheitswert* 1 *zu Knoten mit Wahrheitswert* 0 *existieren.*

Wir beweisen jetzt, dass K genau dann nicht erfüllbar ist, wenn es eine Variable x_i gibt, so dass in G sowohl ein Weg von x_i nach $\overline{x}_i$ als auch ein Weg von $\overline{x}_i$ nach x_i existiert.

(*b*) *Nimm an, dass K erfüllbar ist und dass für eine Variable x_i Wege von x_i nach $\overline{x}_i$ und von $\overline{x}_i$ nach x_i existieren. Zeige, dass dann im Widerspruch zur Annahme und (a) in G eine Kante von einem Knoten mit Wahrheitswert* 1 *zu einem Knoten mit Wert* 0 *existiert.*

Nun konstruieren wir unter der Annahme, dass keine derartige Variable x_i existiert, mittels der folgenden Vorschrift iterativ eine erfüllende Belegung:

> Suche einen Knoten ℓ, der noch keinen Wahrheitswert hat und von dem aus $\overline{\ell}$ nicht erreichbar ist. Falls noch nicht alle Variablen belegt sind, existiert ein derartiger Knoten aufgrund unserer Annahme (Warum?). Betrachte nun alle Knoten einschließlich ℓ, die von ℓ aus erreichbar sind und noch keinen Wahrheitswert haben, und belege die zugehörigen Variablen so, dass diese Knoten den Wahrheitswert 1 erhalten. (Erinnerung: Knoten entsprechenden Literalen)

(c) *Beweise, dass mittels der Vorschrift eine wohldefinierte Variablenbelegung konstruiert wird, also dass wir nicht gleichzeitig sowohl ein Literal* ℓ *als auch sein Komplement* $\overline{\ell}$ *erfüllen müssen.*
Tipp: Benutze die Beobachtung aus der Kurzaufgabe.

(d) *Zeige mittels Aufgabenteil (a), dass die konstruierte Belegung* K *erfüllt.*
Tipp: Unterscheide für $(\ell_1, \ell_2) \in E$*, welches der beteiligten Literale zuerst belegt wurde.*

Testfragen:

1. Was besagt der Satz von Cook?
2. Was ist eine stereotype Turingmaschine?
3. Welche Charakterisierungen von NP kennst du aus der Vorlesung?